MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Pitkä matematiikka, syksy 2013

Mallivastaukset, 25.9.2013

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Ratkaise yhtälö $x^2 + 6x = 2x^2 + 9$.

b) Ratkaise yhtälö $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

c) Esitä polynomi $x^2 - 9x + 14$ ensimmäisen asteen polynomien tulona.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 2x^2 + 9 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3}} \end{aligned}$$

2 p

Vaihtoehtoisesti toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla tai suoraan laskimella:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 2x^2 + 9 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3}} \quad \text{(laskimella)} \end{aligned}$$

2 p

b)

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \tag{1}$$

Määrittelyehdot

$$\begin{aligned} 1 - x &\neq 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned} \qquad \text{ja} \qquad 1 + x^2 \neq 0$$

toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$,
koska $1 + x^2 > 0$

Kerrotaan ristiin (1):

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2) &= (1-x^2)(1-x) \qquad \text{1 p (3 p)} \\ \cancel{x^3} + x^2 + x + \cancel{1} &= \cancel{x^3} - x - x^2 + \cancel{1} \\ 2x^2 + 2x &= 0 \\ 2x(x+1) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = -1}}$ 1 p (4 p)

Huom: Laskinratkaisu on nopea koetilanteessa, mutta sinun tulee osata myös edellinen tapa. Määrittely-ehdot on tärkeä ymmärtää, jos joudut esim. tutkimaan rationaalifunktion kulkua.

Laskinratkaisu:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = -1 \text{ (laskimella)}}}$ 2 p (4 p)

c)

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1}}$

$$\begin{aligned} x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ x &= \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 + 4 \cdot 14 \cdot 1}}{2} \\ x = 2 \quad &\text{tai} \quad x = 7 \end{aligned}$$

1 p (5 p)

Tekijälauseen perusteella

$$x^2 - 9x + 14 = \underline{\underline{(x-2)(x-7)}}$$

1 p (6 p)

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 2}}$

$$x^2 - 9x + 14 = \underline{\underline{(x-2)(x-7)}}$$

(kaavalla $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$) 2 p (6 p)

$\boxed{\text{Laskinratkaisu}}$

$x^2 - 9x + 14 = \underline{\underline{(x-2)(x-7)}}$ (laskimella) 2 p (6 p)

2. a) Millä muuttujan x arvoilla polynomin $P(x) = x^4 - x^3 + x$ derivaatta saa arvon 1?
   b) Määritä funktion $4x + \cos(4x)$ kaikki integraalifunktiot.
   c) Positiivinen luku a on 25 prosenttia pienempi kuin luku b. Kuinka monta prosenttia luku b on suurempi kuin a.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 + x \\ P'(x) &= 4x^3 - 3x^2 + 1 \qquad \text{1 p} \end{aligned}$$

Derivaatta saa arvon 1, kun

$$\begin{aligned} P'(x) &= 1 \\ 4x^3 - 3x^2 + \cancel{1} &= \cancel{1} \\ x^2(4x-3) &= 0 \\ x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 4x - 3 &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \qquad x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Vastaus: $x = 0$ tai $x = \frac{3}{4}$ 1 p (2 p)

b) Merkitään

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x + \cos(4x) \\ F(x) &= \int (4x + \cos(4x))dx \\ &= \int 4x\,dx + \frac{1}{4}\int 4\cos(4x)dx \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\sin 4x + C \\ &= 2x^2 + \frac{1}{4}\sin 4x + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \text{2 p (4 p)} \end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti yksi integraalifunktio saadaan laskimella

$$\int (4x + \cos(4x))dx = 2x^2 + \frac{1}{4}\sin 4x, \qquad \text{1 p (3 p)}$$

josta saadaan kaikki integraalifunktiot lisäämällä integroimisvakio:

$$F(x) = \underline{\underline{2x^2 + \frac{1}{4}\sin 4x + C, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$ 1 p (4 p)

c) Tehtävänannon mukaan

$$a = 0{,}75b, \quad a > 0.$$

Siten kysytty vertailuprosentti on

$$\frac{b-a}{a} = \frac{\overset{1}{\cancel{b}} - 0{,}75\overset{1}{\cancel{b}}}{0{,}75\overset{1}{\cancel{b}}} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = 0{,}333\ldots \approx 33\,\%$$

Vastaus: $\underline{\underline{b \text{ on } 33\,\% \text{ suurempi kuin } a.}}$ 2 p (6 p)

3. a) Määritä vektoreiden $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$ ja $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}$ välisen kulman likiarvo asteen kymmenesosan tarkkuudella.
   b) Millä parametrin s arvolla vektorit $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$ ja $\bar{c} = s\bar{i} + (1-s)\bar{j}$ ovat yhdensuuntaiset?

Ratkaisu.

a)

$$\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}, \quad \bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}$$

Kulman suuruus saadaan pistetulon avulla

$$\cos \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 1 && \text{1 p} \\ |\bar{a}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ |\bar{b}| &= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} && \text{1 p (2 p)} \end{aligned}$$

Lasketaan kulma yhtälöstä (1):

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) &= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \\ \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) &= 81{,}869\ldots^\circ \\ &\approx 81{,}9^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Kulman suuruus on 81,9°.</u> 1 p (3 p)

b)

$$\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}, \quad \bar{c} = s\bar{i} + (1-s)\bar{j}$$

Vektorit ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun

$$\begin{aligned} \bar{c} &= t\bar{a}, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R} \\ s\bar{i} + (1-s)\bar{j} &= t(\bar{i} - 2\bar{j}) \\ s\bar{i} + (1-s)\bar{j} &= t\bar{i} - 2t\bar{j} && \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

Komponenttien yksikäsitteisyydestä saadaan

$$\begin{cases} s = t & (2) \\ 1 - s = -2t & \text{1 p (5 p)} \quad (3) \end{cases}$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (3), saadaan

$$\begin{aligned} 1 - s &= -2s \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Vektorit } \bar{a} \text{ ja } \bar{c} \text{ ovat yhdensuuntaiset, kun } s = -1.}}$ 1 p (6 p)

4. Millä parametrin k arvoilla käyrien $y = kx^2$ ja $y = k(x-2)^2$ leikkauspisteeseen piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= kx^2 \\
y_2 &= k(x-2)^2
\end{aligned}
$$

Lasketaan käyrien leikkauskohta.

$$
\begin{cases}
y = kx^2 & (1) \\
y = k(x-2)^2 & (2)
\end{cases}
$$

Oltava $k \neq 0$, koska tällöin kyseessä olisi sama suora $y = 0$, eikä $y_1 \perp y_2$. Sijoitetaan (1) yhtälöön (2).

1 p

$$
\begin{aligned}
k(x-2)^2 &= kx^2 \quad \| : k \\
(x-2)^2 &= x^2 \\
x^2 - 4x + 4 &= x^2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

1 p (2 p)

Yhtälöparin voi ratkaista myös laskimella.
Lasketaan käyrien tangenttien kulmakertoimet derivaatan avulla kohdassa $x = 1$.

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= 2kx \\
k_1 &= y_1'(1) \\
&= 2k \cdot 1 \\
&= 2k
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y_2'(x) &= 2k(x-2) \\
k_2 &= y_2'(1) \\
&= 2k(1-2) \\
&= -2k
\end{aligned}
$$

2 p (4 p)

Tangenttien kohtisuoruusehto on

$$
\begin{aligned}
k_1 \cdot k_2 &= -1 \\
2k \cdot (-2k) &= -1 \\
-4k^2 &= -1 \quad \| : 4 \\
k^2 &= \frac{1}{4} \\
k &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\
k &= \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Tangentit ovat kohtisuorassa arvoilla $k = -\frac{1}{2}$ tai $k = \frac{1}{2}$.

2 p (6 p)

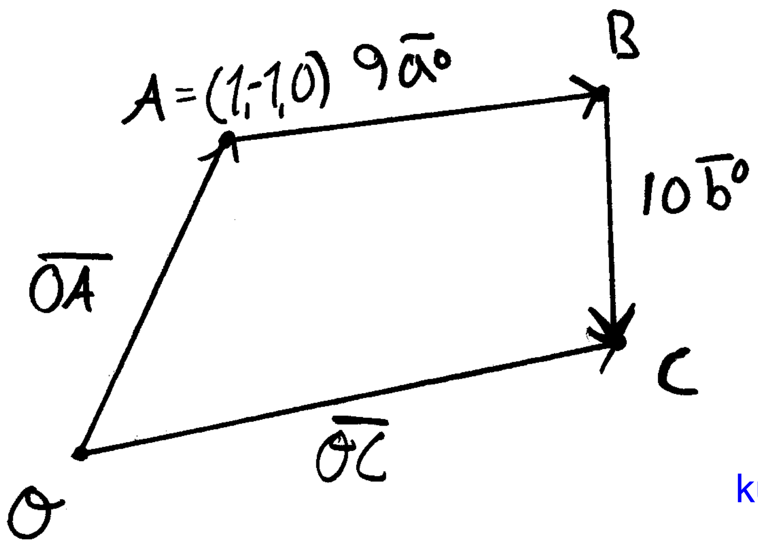
5. Pisteestä $A(1,-1,0)$ siirrytään 9 pituusyksikköä vektorin $\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ suuntaan pisteeseen B ja siitä edelleen 10 pituusyksikköä vektorin $3\bar{i}-4\bar{k}$ suuntaan pisteeseen C. Määritä pisteen C koordinaatit.

Ratkaisu.

$$\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$$
$$\bar{b}=3\bar{i}-4\bar{k}$$

Lasketaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ suuntaiset yksikkövektorit.

$$|\bar{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$$
$$\bar{a}^\circ=\frac{\bar{a}}{3}=\frac{1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}$$ 1 p
$$|\bar{b}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$
$$\bar{b}^\circ=\frac{\bar{b}}{5}=\frac{3}{5}\bar{i}-\frac{4}{5}\bar{k}$$ 1 p (2 p)



kuva 1 p (3 p)

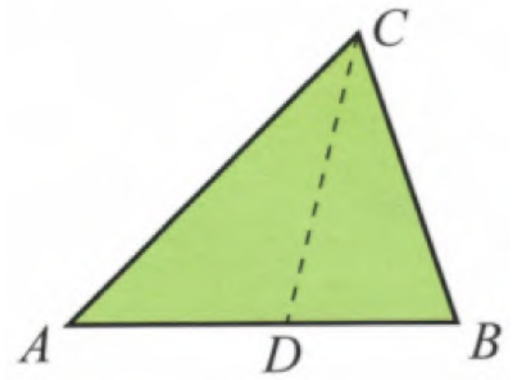
$$\overline{OA}=\bar{i}-\bar{j}$$
$$\overline{AB}=9\bar{a}^\circ$$
$$\overline{BC}=10\bar{b}^\circ$$ 1 p (4 p)

Lausutaan paikkavektori $\overline{OC}$ vektorien $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ summana.

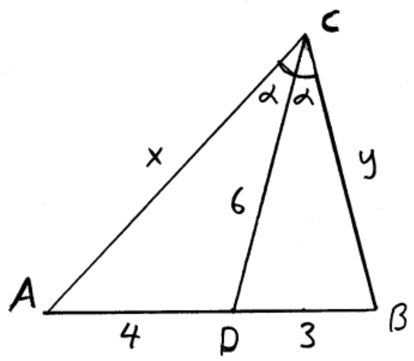
$$\begin{aligned}
\overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} && \text{1 p (5 p)}\\
&= \bar{i} - \bar{j} + 9\bar{a}^\circ + 10\bar{b}^\circ\\
&= \bar{i} - \bar{j} + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}\right) + 10 \cdot \left(\frac{3}{5}\bar{i} - \frac{4}{5}\bar{k}\right)\\
&= \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{i} - 6\bar{j} + 6\bar{k} + 6\bar{i} - 8\bar{k}\\
&= 10\bar{i} - 7\bar{j} - 2\bar{k}
\end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty piste on $C = (10, -7, -2)$. 1 p (6 p)

6. Kolmion ABC kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä D. Pisteiden välisille etäisyyksille on voimassa $CD = 6$, $AD = 4$ ja $DB = 3$. Määritä kolmion sivujen AC ja BC pituuksien tarkat arvot.



Ratkaisu.



Kulmanpuolittajalauseen mukaan

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \quad \| \cdot y$$

$$x = \frac{4}{3}y \qquad \text{1 p} \qquad (1)$$

Kosinilause kolmiolle ACD on

$$4^2 = x^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos(\alpha), \quad \text{merkitään } \cos(\alpha) = z$$

$$16 = x^2 + 36 - 12xz$$

$$12xz = x^2 + 20 \quad \| : 12x$$

$$z = \frac{x^2 + 20}{12x} \qquad \text{1 p (2 p)} \qquad (2)$$

ja kolmiolle BCD

$$3^2 = y^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot y \cdot \cos(\alpha)$$

$$z = \frac{y^2 + 27}{12y} \qquad \text{1 p (3 p)} \qquad (3)$$

Yhdistetään yhtälöt (2) ja (3).

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+20}{12x} &= \frac{y^2+27}{12y} \quad \| \cdot 12xy \\
y(x^2+20) &= x(y^2+27) \quad \|\text{sij. } (1) \\
y\left[\left(\frac{4}{3}y\right)^2+20\right] &= \frac{4}{3}y\left(y^2+27\right) \qquad \text{1 p (4 p)} \\
\frac{4}{9}y^3-16y &= 0 \\
y\left(\frac{4}{9}y^2-16\right) &= 0 \\
\frac{4}{9}y^2-16 &= 0 \quad (\text{tai } y=0) \\
y^2 &= 36 \\
y &= \underset{(-)}{+}\sqrt{36} \\
y &= 6 \qquad \text{1 p (5 p)}
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 6$ yhtälöön (1).

$$x = \frac{4}{3}\cdot 6 = 8$$

Yhtälöiden (1), (2) ja (3) muodostama yhtälöryhmä voidaan ratkaista myös laskimella.

Vastaus: Kolmion sivujen pituudet ovat $|AC| = 8$ ja $|BC| = 6$. 1 p (6 p)

7. Laske integraali $\int_0^2 |x^3 - x|dx$.

Ratkaisu.

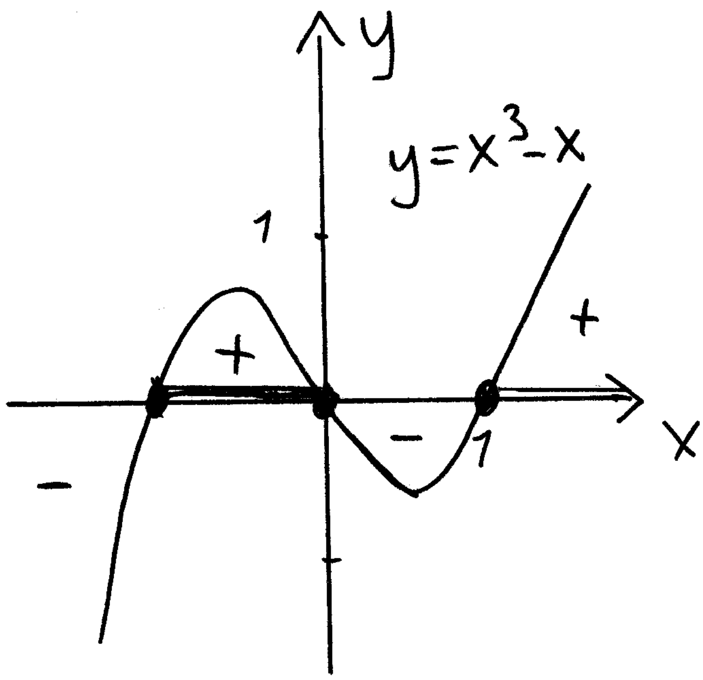
$$\int_0^2 |x^3 - x|dx$$

Määritetään itseisarvo paloittain.

$$x^3 - x \geq 0$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm\sqrt{1} \\ x &= \pm 1 \qquad \text{1 p} \end{aligned}$$



Epäyhtälön ratkaisu on

$$-1 \leq x \leq 0 \quad \text{tai} \quad x \geq 1. \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Merkitään itseisarvo paloittain välillä $[0, 2]$:

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x - x^3, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ x^3 - x, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Integroidaan paloittain:

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^3 - x| dx &= \int_0^1 (x - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - x)dx \qquad \text{2 p (4 p) *}\\ &= \Big/_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) + \Big/_1^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \qquad \text{1 p (5 p)}\\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 - 0\right) + \left[\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\right)\right]\\ &= \underline{\underline{\frac{5}{2}}} \qquad \text{1 p (6 p)}\end{aligned}$$

*) Tästä välivaiheesta
eteenpäin tuloksen
voi laskea suoraan
laskimella.

8. Kaksipäiväisiin turnajaisiin osallistui kaikkiaan 329 ritaria. Heistä oli ensimmäisenä päivänä paikalla 302 ja toisena 285. Millä todennäköisyydellä turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla molempina päivinä?

Ratkaisu.

TAPA I

Lasketaan todennäköisyydet

$$\text{Turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla 1. päivänä} \quad P(A) = \frac{302}{329}$$

$$\text{Turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla 2. päivänä} \quad P(B) = \frac{285}{329}$$ 2 p

Kaikki olivat paikalla joko 1. tai 2. päivänä tai molempina päivinä, joten

$$P(A \text{ tai } B) = 1.$$ 1 p (3 p)

Ratkaistaan kysytty todennäköisyys $P(A \text{ ja } B)$. Yleisestä yhteenlaskusäännöstä saadaan

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$ 1 p (4 p)

$$\begin{aligned}
P(A \text{ ja } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ tai } B) \\
P(A \text{ ja } B) &= \frac{302}{329} + \frac{285}{329} - 1 \\
P(A \text{ ja } B) &= \frac{258}{329} = 0{,}7841\ldots \\
&\approx 78{,}4\,\%
\end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 78,4 %. 2 p (6 p)

TAPA II

Merkitään

$$\begin{aligned}
n_A &= \text{niiden ritarien määrä, jotka osallistuivat vain 1. päivänä} \\
n_B &= \text{niiden ritarien määrä, jotka osallistuivat vain 2. päivänä} \\
n_{AB} &= \text{niiden ritarien määrä, jotka osallistuivat molempina päivinä} \\
n &= n_A + n_B + n_{AB} = 329 \quad \text{(ritarien määrä yhteensä)}
\end{aligned}$$

Tehtävänannon perusteella

$$\begin{cases} n_A + n_{AB} = 302 \\ n_B + n_{AB} = 285 \end{cases} \qquad \text{2 p}$$

$$\underbrace{n_A + n_B + n_{AB}}_{n=329} + n_{AB} = 587$$

$$329 + n_{AB} = 587$$

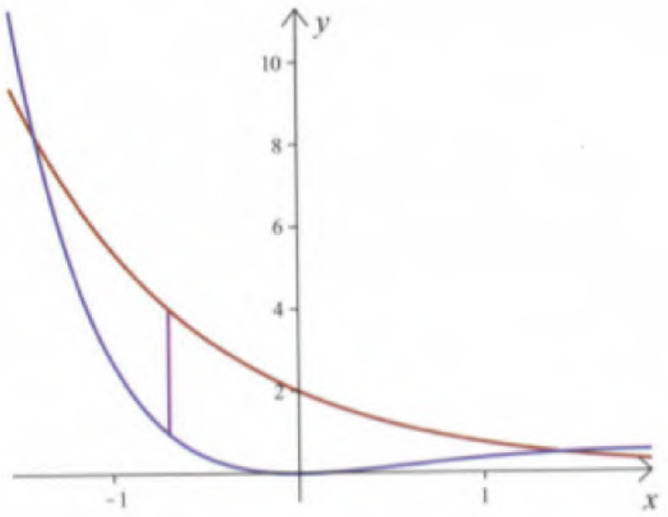
$$n_{AB} = 258 \qquad \text{2 p (4 p)}$$

Todennäköisyys, että ritari osallistui molempina päivinä on

$$P = \frac{n_{AB}}{n} = \frac{258}{329} = 0{,}7841\ldots \approx 78{,}4\,\%$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 78,4 %. 2 p (6 p)

9. Käyrien $y = 2e^{-x}$ ja $y = x^2e^{-x}$ väliin jäävään rajoitettuun alueeseen asetetaan y-akselin suuntainen jana oheisen kuvion mukaisesti. Määritä tämän janan suurin mahdollinen pituus. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



Ratkaisu.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2e^{-x} \\ y_2(x) &= x^2e^{-x} \end{aligned}$$

Selvitetään leikkauskohdat.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_2(x) \\ 2e^{-x} &= x^2e^{-x} \\ 2e^{-x} - x^2e^{-x} &= 0 \\ \left(2 - x^2\right) e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$

Nyt koska $e^{-x} > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x,

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= 0 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

1 p

(Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.)

Tarkastellaan siis väliä $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ eli $[-1{,}41\ldots; 1{,}41\ldots]$.

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 2 \cdot e^{-0} = 2 \\ y_2(0) &= 0^2 \cdot e^{-0} = 0, \end{aligned}$$

1 p (2 p)

joten koska y_1 ja y_2 ovat jatkuvia, $y_1(x) \geq y_2(x)$ tarkasteluvälillä. Täten janan pituus on

$$\begin{aligned}\ell(x) &= y_1(x) - y_2(x)\\ &= 2e^{-x} - x^2e^{-x}\\ &= (2 - x^2)e^{-x}\end{aligned}$$

1 p (3 p)

Derivoituvan funktion suurin arvo löytyy joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Derivoidaan $\ell(x)$.

$$\begin{aligned}\ell'(x) &= -2xe^{-x} + (2 - x^2)\cdot(-e^{-x})\\ &= x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\\ &= \left(x^2 - 2x - 2\right)e^{-x}\end{aligned}$$

(Derivoinnin voi tehdä myös laskimella) 1 p (4 p)

Koska $e^{-x} > 0$, derivaatan nollakohdat ovat lausekkeen $x^2 - 2x - 2$ nollakohdat.

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \pm \cancel{2}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$x = 1 - \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad x = 1 + \sqrt{3}$$

1 p (5 p)

$$x \approx -0{,}73 \quad \text{tai} \quad x \approx 2{,}73$$

Näistä vain $1-\sqrt{3}$ kuuluu tarkasteluvälille. Koska käyrät leikkaavat tarkasteluvälin päätepisteissä, suurin arvo on derivaatan nollakohdassa. Tämä arvo on

$$\begin{aligned}\ell(1-\sqrt{3}) &= (2 - (1-\sqrt{3})^2)e^{-(1-\sqrt{3})}\\ &= (2 - (1 - 2\sqrt{3} + 3))e^{\sqrt{3}-1}\\ &= (2 - 1 + 2\sqrt{3} - 3)e^{\sqrt{3}-1}\\ &= \underline{\underline{2(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}-1}}}\end{aligned}$$

(Lausekkeen voi sieventää myös laskimella.)

$$\begin{aligned}&= 3{,}04436\ldots\\ &\approx \underline{\underline{3{,}04}}\end{aligned}$$

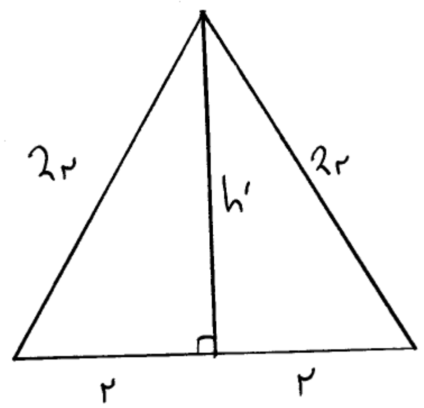
1 p (6 p)

10. Pöydällä on kolme samankokoista palloa, joista kukin koskettaa kahta muuta. Niiden päälle asetetaan neljäs samanlainen pallo, joka koskettaa kaikkia kolmea alkuperäistä palloa. Mikä on rakennelman korkeus? Anna vastauksena tarkka arvo pallojen säteen avulla lausuttuna.

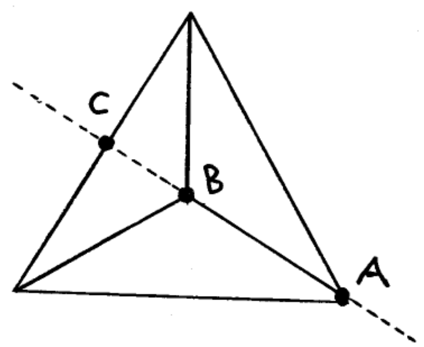
Ratkaisu. Olkoon pallojen säde r. Kun asetetaan kaksi palloa sivuamaan toisiaan, niiden keskipisteitä yhdistävä jana kulkee niiden sivuamispisteen kautta. Nyt kun pallot ovat samankokoisia ja sivuavat toisiaan, niiden keskipisteitä yhdistävät janat muodostavat säännöllisen tetraedrin, jonka sivun pituus on $2r$. Lasketaan tetraedrin korkeus (kahdella eri tavalla).

$\boxed{\text{Tapa I}}$

Yhden tahkon korkeusjanan pituus h' saadaan tasasivuisesta kolmiosta pythagoraan lauseella



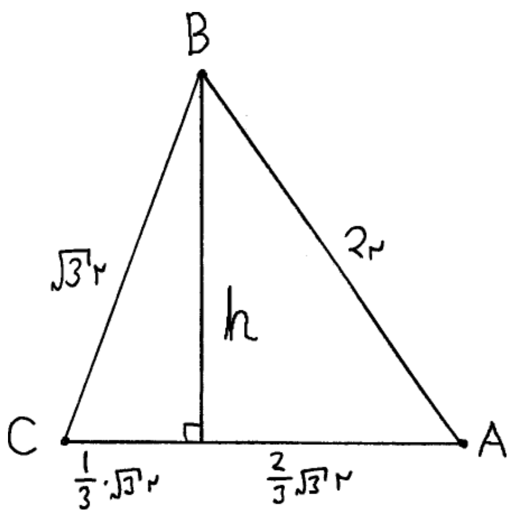
$$
\begin{aligned}
(2r)^2 &= r^2 + h'^2 \\
h'^2 &= 3r^2 \\
h' &= \underset{(-)}{+} \sqrt{3}r \qquad \text{1 p}
\end{aligned}
$$



Yllä olevassa kuvassa on esitetty tetraedri suoraan ylhäältä katsottuna. Tarkastellaan katkoviivalla merkittyä pystysuuntaista tasoa, joka leikkaa tetraedrin siten, että särmä AB on leikkaustasossa. Janat BC ja AC ovat tahkojen korkeusjanoja, joten niiden pituudet ovat $h' = \sqrt{3}r$. 1 p (2 p)

Tahkot ovat tasasivuisia kolmioita, joten korkeusjanat ovat myös mediaaneja. Tiedetään, että ne jakavat toisensa suhteessa 2 : 1. Nyt symmetrian nojalla tetraedrin ylimmästä kärjestä B alatahkolle piirretty korkeusjana leikkaa alatahkon sen mediaanien leikkauspisteessä. Täten tetraedrin korkeusjana jakaa janan AC suhteessa 2 : 1.

Alla olevassa kuvassa on esitetty kolmio ABC. Kolmion korkeusjana h on myös tetraedrin korkeusjana.



1 p (3 p)

Pythagoraan lauseella

$$
\begin{aligned}
(2r)^2 &= h^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}r\right)^2 \\
4r^2 &= h^2 + \frac{4}{3}r^2 \\
h^2 &= 4r^2 - \frac{4}{3}r^2 \\
h^2 &= \frac{8}{3}r^2 \\
h &= (\pm)\sqrt{\frac{8}{3}}r
\end{aligned}
$$

2 p (5 p)

TAPA II

Tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60°. Lasketaan tetraedrin tahkon pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin(60°) = 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r^2 \qquad \text{1 p} \qquad (1)$$

Säännöllisen tetraedrin tilavuus (MAOL:sta) on

$$V = \frac{(2r)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}r^3}{12} = \frac{\sqrt{8}r^3}{3} \qquad \text{1 p (2 p)} \qquad (2)$$

Toisaalta kartion tilavuuden kaavalla saadaan

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Ah \quad \| \text{sij. } (1) \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}r^2 h \\ V &= \frac{r^2}{\sqrt{3}}h \qquad \text{1 p (3 p)} \qquad (3) \end{aligned}$$

Yhdistetään (2) ja (3):

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{r^2}}{\sqrt{3}}h &= \frac{\sqrt{8}r^{\cancel{3}}}{3} \quad \| \cdot \sqrt{3} \\ h &= \sqrt{\frac{8}{3}}r \qquad \text{2 p (5 p)} \end{aligned}$$

Nyt tetraedri on korkeudella r pöydästä, ja rakennelma ylettyy vielä ylimmän pallon säteen r verran tetraedrin yläpuolelle, joten rakennelman korkeus on

$$h + 2r = \sqrt{\frac{8}{3}}r + 2r = \underline{\underline{\left(\sqrt{\frac{8}{3}} + 2\right) r}} \qquad \text{1 p (6 p)}$$

11. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Laske integraalin $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ likiarvo käyttämällä puolisuunnikassääntöä, kun jakovälejä on viisi.

Ratkaisu.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Puolisuunnikassäännöllä integraalin $\int_0^1 f(x)dx$ likiarvo viidellä jakovälillä, joten

$$h = \frac{1-0}{5} = 0{,}2. \qquad \text{1 p}$$

Integraali

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &\approx h\left[\frac{1}{2}f(0) + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + \frac{1}{2}f(1)\right] \\ &= 0{,}2 \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\sin 0{,}2}{0{,}2} + \frac{\sin 0{,}4}{0{,}4} + \frac{\sin 0{,}6}{0{,}6} + \frac{\sin 0{,}8}{0{,}8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 1}{1}\right] \\ &= 0{,}94507\ldots \qquad \text{4 p (5 p)} \end{aligned}$$

Tutkitaan saadun likiarvon tarkkuutta virhetermin avulla.

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{(b-a)^3 f''(t)}{12n^2}, \quad \text{missä } a < t < b \\ E_5 &= -\frac{(1-0)^3 f''(t)}{12\cdot 5^2} \\ E_5 &= -\frac{f''(t)}{300}, \quad \text{missä } 0 < t < 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Lasketaan 2. derivaatta

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sin t}{t} = t^{-1}\sin t \\ f'(t) &= -t^{-2}\sin t + t^{-1}\cos t \\ f''(t) &= 2t^{-3}\sin t - t^{-2}\cos t - t^{-2}\cos t - t^{-1}\sin t \\ &= \frac{2\sin t}{t^3} - \frac{2\cos t}{t^2} - \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

Graafisella laskimella todetaan, että $f''(t)$ saa pienimmän arvon välillä $0 < t < 1$, kun $t \to 0$. Tällöin $f''(t) \to -0{,}333$.
Siten virhetermin (1) suurin arvo on

$$E_5 \approx -\frac{-0{,}333}{300} = 0{,}00111$$

Virhe on siis tuhannesosan luokkaa, joten pyöristetään saatu integraalin arvo sadasosien tarkkuuteen.

Vastaus: $\underline{\underline{\int_0^1 f(x)dx \approx 0{,}95}}$

Järkevä perustelu pyöristystarkkuudelle 1 p (6 p)
esim. virhetermiä tutkimalla kuten edellä
tai vertaamalla likiarvoa laskimella saatuun
integraalin tarkkaan arvoon.

12. Merkitään $R(x) = \dfrac{9x^2-1}{3x^2-5x-2}$. Määritä raja-arvo.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} R(x)$

Ratkaisu.

a) Tarkastellaan lauseketta $R(x)$, kun $x > 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-1}{3x^2-5x-2} \overset{(x^2}{} &= \lim_{x\to\infty} \frac{9-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}} && \text{2 p}\\ &= \frac{9-0}{3-0-0}\\ &= \frac{9}{3}\\ &= \underline{\underline{3}} && \text{1 p (3 p)}\end{aligned}$$

b)

$$R(x) = \frac{9x^2-1}{3x^2-5x-2}$$

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$\begin{aligned}3x^2-5x-2 &= 0\\ x &= \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}\\ x &= \frac{5\pm\sqrt{49}}{6}\\ x &= \frac{5\pm 7}{6}\\ x = 2 \quad &\text{tai} \quad x = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Täten nimittäjä on

$$3x^2-5x-2 = 3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right) = (x-2)(3x+1) \qquad \text{1p (4p)} \tag{1}$$

Osoittaja on

$$9x^2-1 = (3x)^2-1^2 = (3x-1)(3x+1) \tag{2}$$

Tarkastellaan lauseketta $R(x)$, kun $x \neq -\frac{1}{3}$.

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \frac{9x^2-1}{3x^2-5x-2} \quad \| \text{sij. (1) ja (2)} \\
R(x) &= \frac{(3x-1)\cancel{(3x+1)}}{(x-2)\cancel{(3x+1)}} \\
R(x) &= \frac{3x-1}{x-2} \qquad \text{1 p (5 p)}
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan lauseketta $R(x)$, kun $x < 2$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\frac{1}{3}} R(x) &= \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x-2} \\
&= \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1}{-\frac{1}{3} - 2} \\
&= \frac{-1-1}{-\frac{1}{3} - \frac{6}{3}} \\
&= \frac{-2}{-\frac{7}{3}} \\
&= \frac{2 \cdot 3}{7} \\
&= \underline{\underline{\frac{6}{7}}} \qquad \text{1 p (6 p)}
\end{aligned}
$$

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\sqrt[3]{2}$ ei ole rationaaliluku.

Ratkaisu. Rationaaliluvut voidaan esittää muodossa $\frac{n}{m}$, missä n ja m ovat yhteistekijättömiä kokonaislukuja ja $m \neq 0$. 1 p

Väite. $\sqrt[3]{2}$ *ei ole rationaaliluku.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $\sqrt[3]{2}$ on rationaaliluku, eli

$$\sqrt[3]{2} = \frac{n}{m},$$

missä n ja m ovat yhteistekijättömiä kokonaislukuja ja $m \neq 0$. Nyt 1 p (2 p)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= \frac{n}{m} \quad \| (\quad)^3 \\ 2 &= \frac{n^3}{m^3} \quad \| \cdot \frac{m^3}{2} \\ \frac{n^3}{2} &= m^3 \end{aligned}$$

Täten koska m ja n ovat kokonaislukuja, luvun 2 täytyy olla luvun n tekijä. Voidaan siis antaa n muodossa $n = 2k$, missä k on kokonaisluku. 2 p (4 p)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= \frac{2k}{m} \quad \| (\quad)^3 \\ 2 &= \frac{2^3k^3}{m^3} \quad \| \cdot \frac{m^3}{4} \\ \frac{m^3}{2} &= 2k^3 \end{aligned}$$

Nyt $2k^3$ on kokonaisluku ja m on kokonaisluku, joten luvun 2 täytyy olla luvun m tekijä. Nyt kuitenkin luvuilla n ja m on yhteinen tekijä 2, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Täten väite on tosi. □

2 p (6 p)

*14. Tarkastellaan tasokäyrää, jonka yhtälö on $2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 2y - 4 = 0$.

a) Määritä käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteet. (2 p.)

b) Osoita, että kaikki leikkauspisteet ovat saman ympyrän kehällä, ja määritä tämän ympyrän yhtälö. (3 p.)

c) Suora kulkee origon ja b-kohdan ympyrän keskipisteen kautta. Missä pisteissä tämä suora leikkaa alkuperäisen käyrän? (2 p.)

d) Onko alkuperäinen käyrä ympyrä? (2 p.)

Ratkaisu.

a)

$$x\text{-akselin yhtälö on } y = 0 \text{ ja}$$
$$y\text{-akselin yhtälö on } x = 0$$

x-akselin leikkauspisteet:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 2y - 4 = 0 & (1) \\ y = 0 & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 4 &= 0 \quad \| : 2 \qquad (3) \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x = 2 \quad \text{tai} \quad x &= -1 \qquad \text{1 p} \end{aligned}$$

y-akselin leikkauspisteet:
Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} 2y^2 + 2y - 4 &= 0 \quad \| : 2 \qquad (4) \\ y^2 + y - 2 &= 0 \\ (y+2)(y-1) &= 0 \\ y = -2 \quad \text{tai} \quad y &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus: <u>x-akselin leikkauspisteet ovat $(2, 0)$ ja $(-1, 0)$ ja y-akselin leikkauspisteet ovat $(0, -2)$ ja $(0, 1)$.</u> 1 p (2 p)

Yhtälöparin (1) ja (2) voi myös ratkaista <u>laskimella</u>. Samoin y-akselin leikkauspisteen kohdalla.

b) Keksitään nokkelasti, että yhtälö

$$2x^2 - 2x + 2y^2 + 2y - 4 = 0 \tag{5}$$

tulee muotoon (3), kun $y = 0$ ja muotoon (4), kun $x = 0$. Näin ollen kaikki leikkauspisteet toteuttavat yhtälön (5). 1 p (3 p)
Neliöidään yhtälö (5):

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2x + 2y^2 + 2y - 4 &= 0 \quad \| : 2 \\
x^2 + y^2 - x + y - 2 &= 0 \\
x^2 - x + y^2 + y &= 2 \quad \| + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\underline{\underline{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}}} & \qquad (6)
\end{aligned}$$

Tämä on ympyrän yhtälö, joten kaikki leikkauspisteet ovat ympyrällä (6).
2 p (5 p)

VAIHTOEHTO 2 B-KOHTAAN

Ympyrän yhtälö on muotoa

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

Ratkaistaan sen ympyrän yhtälö, joka kulkee leikkauspisteiden $(2, 0)$, $(-1, 0)$ ja $(0, 1)$ kautta. Pisteiden täytyy toteuttaa yhtälö (7), joten

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + A\cdot 2 + B\cdot 0 + C = 0 \\ (-1)^2 + 0^2 + A\cdot(-1) + B\cdot 0 + C = 0 \\ 0^2 + 1^2 + A\cdot 0 + B\cdot 1 + C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + C = -4 \\ -A + C = -1 \\ B + C = -1 \end{cases}$$ 1 p (3 p)

Ratkaistaan laskimella:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = -2 \end{cases}$$

Ympyrän yhtälö on siis

$$\underline{\underline{x^2+y^2-x+y-2=0.}} \qquad \text{1 p (4 p)} \tag{8}$$

Myös neljäs leikkauspiste $(0,-2)$ toteuttaa ympyrän yhtälön (8), koska

$$\begin{aligned} 0^2+(-2)^2-0+(-2)-2&=0 \\ 0&=0. \end{aligned}$$

Kaikki leikkauspisteet ovat siis ympyrällä (8). 1 p (5 p)

Yhtälön neliöinti c-kohtaa varten samalla tavalla kuin edellä.

c) b-kohdan ympyrän keskipiste on $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Huomataan, että sekä keskipiste että origo $(0,0)$ toteuttavat yhtälön $y=-x$, joten kysytty suora on $y=-x$. Suoran $y=-x$ ja alkuperäisen käyrän leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-3xy-2x+2y-4=0 & (9) \\ y=-x & (10) \end{cases}$$

1 p (6 p)

Sijoitetaan (10) yhtälöön (9), saadaan

$$\begin{aligned} 2x^2+2x^2+3x^2-2x-2x-4&=0 \\ 7x^2-4x-4&=0 \\ x&=\frac{2\pm4\sqrt{2}}{7} \quad \text{(laskimella)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan x:n arvot yhtälöön (10).

$$y=\frac{-2\mp4\sqrt{2}}{7}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kysytyt leikkauspisteet ovat } \left(\frac{2+4\sqrt{2}}{7},\frac{-2-4\sqrt{2}}{7}\right) \text{ ja } \left(\frac{2-4\sqrt{2}}{7},\frac{-2+4\sqrt{2}}{7}\right).}}$

1 p (7 p)

d) Alkuperäisen käyrän yhtälö on

$$\begin{aligned} 2x^2+2y^2-3xy-2x+2y-4&=0 \quad \|:2 \\ x^2+y^2-x+y-\frac{3}{2}xy-2&=0 \end{aligned}$$

Käyrä ei ole ympyrä, koska ympyrän yhtälö xy-tasossa on aina muotoa $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, mutta saadussa yhtälössä on sekatermi $-\frac{3}{2}xy$.

2p (9p)

VAIHTOEHTO 2

Kolme pistettä määräävät ympyrän. Ympyrällä (8) on b-kohdan perusteella neljä yhteistä pistettä alkuperäisen käyrän kanssa. Näin ollen, jos alkuperäinen käyrä on ympyrä, se yhtyy ympyrään (8). Alkuperäinen käyrä ei voi kuitenkaan olla sama kuin ympyrä (8), koska c-kohdassa saatu alkuperäisen käyrän piste $\left(\frac{2+4\sqrt{2}}{7}, \frac{-2-4\sqrt{2}}{7}\right)$ ei toteuta ympyrän yhtälöä (8). Sijoittamalla em. pisteen koordinaatit yhtälöön (8) saadaan laskimella epätosi yhtälö $-1{,}7947\ldots = 0$. Alkuperäinen käyrä ei siis ole ympyrä.

2 p (9 p)

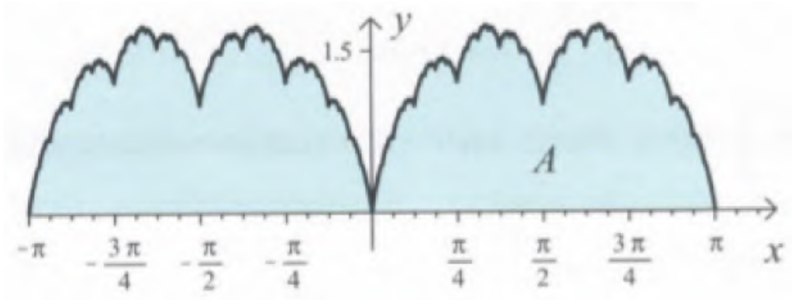
*15. Kaava $f_k(x) = 2^{-k}\left|\sin\left(2^k x\right)\right|$ määrittelee jokaisella $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ funktion $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Piirrä funktioiden f_0, f_1 ja f_2 kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$. (2 p.)

b) Laske integraalit $\int_0^\pi f_k(x)dx$, kun $k = 0,\ 1,\ 2$. (2 p.)

c) Määritä lausekkeen $A_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\pi f_k(x)dx$ tarkka arvo kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$. (3 p.)

d) Laske raja-arvo $A = \lim_{n\to\infty} A_n$. (2 p.)



Ratkaisu.

a) Funktion, jonka lauseke on $\sin(2^k x)$ jakso on $\dfrac{2\pi}{2^k}$. Funktion, jonka lauseke on $|\sin(2^k x)|$ jakso on puolet $\sin(2^k x)$:n jaksosta, eli

$$\frac{2\pi}{2 \cdot 2^k} = \frac{\pi}{2^k}$$

Lasketaan jaksot kysytyillä k:n arvoilla.

$$\begin{aligned} k &= 0, \quad \text{jakso on } \pi \\ k &= 1, \quad \text{jakso on } \frac{\pi}{2^1} = \frac{\pi}{2} \\ k &= 2, \quad \text{jakso on } \frac{\pi}{2^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Funktion, jonka lauseke on

$$f_k(x) = 2^{-k}|\sin(2^k x)|$$

jakso on sama kuin $|\sin(2^k x)|$:n jakso, sillä kerroin 2^k on vakio eri tilanteissa. Selvästi

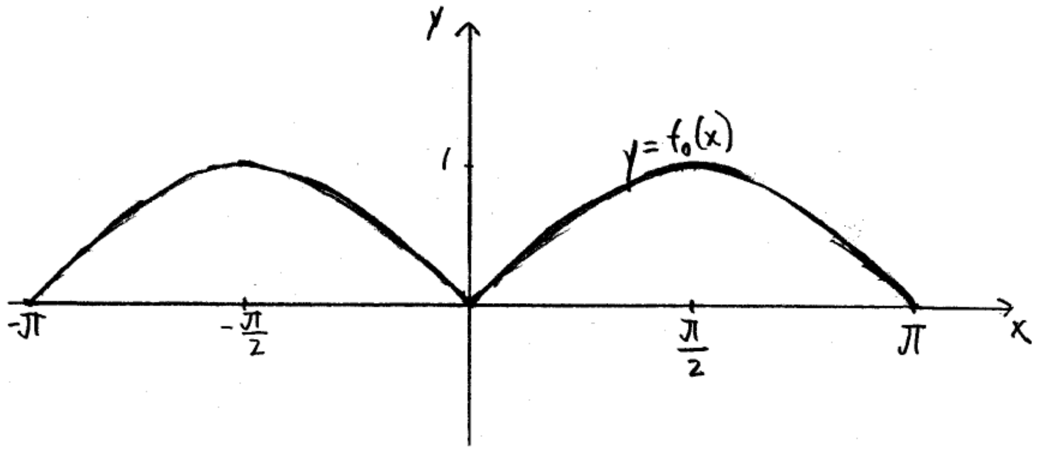
$$\begin{aligned} \min(f_k(x)) = 0 \quad \text{ja} \quad f_k(0) = 0 \\ \max(f_k(x)) = 2^{-k} \cdot \max(|\sin(2^k x)|) = 2^{-k} \end{aligned}$$

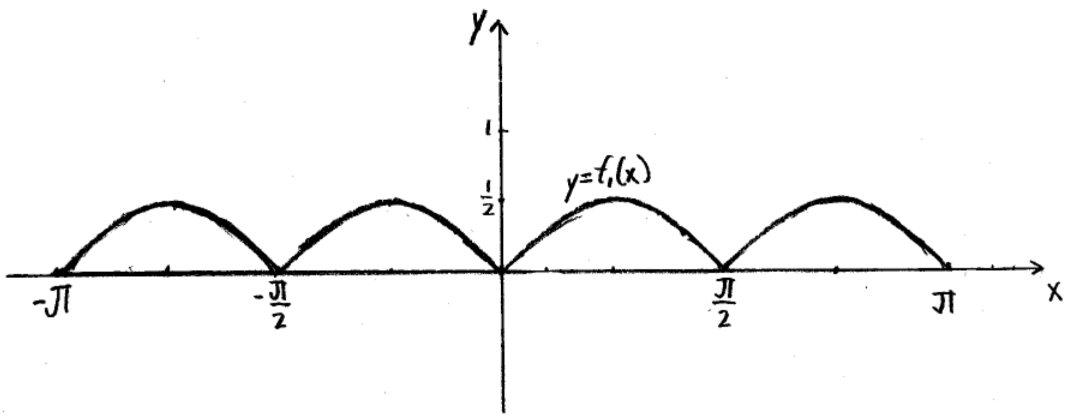
Maksimiarvot kysytyillä k:n arvoilla ovat

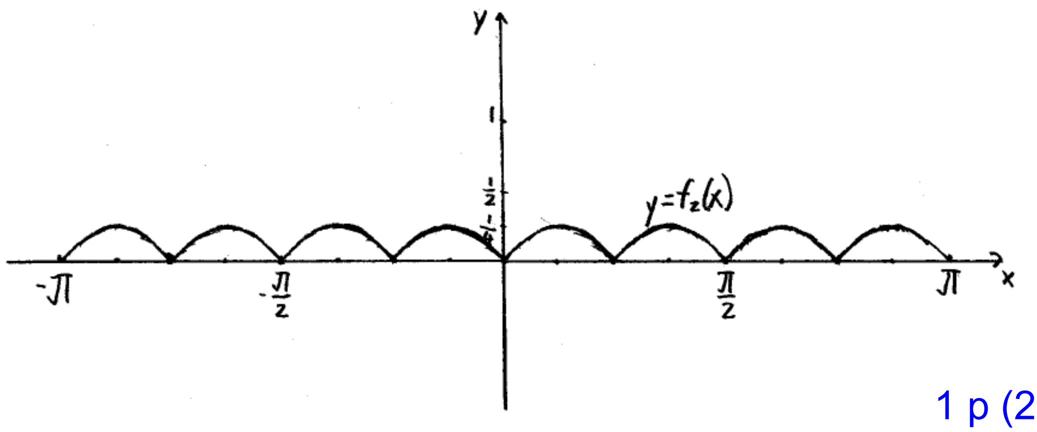
$$
\begin{aligned}
k &= 0, \quad \max(f_0(x)) = 1 \\
k &= 1, \quad \max(f_1(x)) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\
k &= 2, \quad \max(f_2(x)) = 2^{-2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

1 p

Nyt voidaan piirtää kysytyt kuvaajat.







1 p (2 p)

b)

VAIHTOEHTO 1.

Lasketaan kysytty integraali yleisellä k c-kohtaa varten. Tehdään sijoitus $x = 2^{-k}t$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f_k(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} 2^{-k}|\sin(2^k x)|\,\mathrm{d}x \\
&= 2^{-k}\int_0^{2^k\pi} |\sin(t)|2^{-k}\,\mathrm{d}t \quad \| \text{ Jaetaan osaväleihin} \\
&= 2^{-2k}\sum_{j=0}^{2^k-1}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nyt

$$|\sin(t+\pi)| = |\sin(t-\pi)| = |-\sin(\pi - t)| = |-\sin(t)|,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f_k(x)\,\mathrm{d}x &= 2^{-2k}\sum_{j=0}^{2^k-1}\int_0^{\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= 2^{-2k}\cdot 2^k\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2^{-k}\Big/_{0}^{\pi} -\cos(t) \\
&= 2^{-k}\left(-\cos(\pi) - (-\cos(0))\right) \\
&= 2^{-k}\cdot 2 \\
&= 2^{1-k}
\end{aligned}$$

1 p (3 p)

Siten

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} f_0(x)\,\mathrm{d}x = 2}}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} f_1(x)\,\mathrm{d}x = 1}}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} f_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}}}$$

1 p (4 p)

$\boxed{\text{Vaihtoehto 2.}}$

Ratkaistaan integraali c-kohtaa varten yleisellä k:n arvolla. Funktion f_1 kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, \pi]$ kaksi samanlaista aluetta. f_2 ja x-akseli rajaavat 4 samanlaista aluetta. Yleisesti f_k ja x-akseli rajaavat 2^k samanlaista aluetta. Integraali voidaan laskea kertomalla yhden alueen ala 2^k:lla.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f_k(x)\,\mathrm{d}x &= 2^k \int_0^{\pi/2^k} f_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2^k \int_0^{\pi/2^k} 2^{-k}|\sin(2^k x)|\,\mathrm{d}x \quad \|\sin(2^k x) \geq 0,\ \text{kun } x \in \left[0, \frac{\pi}{2^k}\right] \\
&= 2^{-k} \int_0^{\pi/2^k} 2^k \sin(2^k x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot 2^{-k} \quad \text{(laskimella)} \\
&= 2^{1-k}
\end{aligned}$$

1 p (3 p)

Siten

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} f_0(x)\,\mathrm{d}x = 2}}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} f_1(x)\,\mathrm{d}x = 1}}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} f_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}}}$$ 1 p (4 p)

(Huom: Integroinnin voi tehdä ilman laskinta kaavalla

$$\int f'(x)g'(f(x))\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C$$

valitsemalla $f(x) = 2^k x$.)

c) Merkitään

$$a_k = \int_0^{\pi} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 2^{1-k},$$

kuten edellisessä kohdassa laskettiin.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{1-k-1}}{2^{1-k}} = \frac{1}{2},$$ 1 p (5 p)

joten jono (a_k) on geometrinen. Käyttämällä geometrisen summan kaavaa

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} f_k(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k && \text{1 p (6 p)} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \underline{\underline{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}} && \text{1 p (7 p)} \end{aligned}$$

d) Raja-arvo

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

saadaan suppenevan geometrisen sarjan kaavasta, sillä suhdeluku $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

1p (8p)

$$A = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{4}}$$

1 p (9 p)

Saman tuloksen olisi voinut myös saada käyttämällä edellisen kohdan lauseketta luvuille A_n.