MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Pitkä matematiikka, syksy 2010

Mallivastaukset, 29.9.2010

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta.

MA-FY Valmennus Oy on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön ja omien yo-vastausten tarkistamista varten. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MA-FY Valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää näitä mallivastauksia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	050 338 7098

1. a) Sievennä lauseke $(a+b)^2-(a-b)^2$.

b) Ratkaise yhtälö $\tan x=\sqrt{3}$.

c) Määritä $f'(-3)$, kun $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

Ratkaisu. **a)**

$$\begin{aligned}(a+b)^2-(a-b)^2&=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)\\&=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2\\&=\underline{\underline{4ab}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\tan x&=\sqrt{3}\\ \underline{\underline{x=\frac{\pi}{3}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2}{x+1}\\ f'(x)&=\frac{2x\cdot(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}\\&=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}\\&=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\\ f'(-3)&=\frac{(-3)^2+2\cdot(-3)}{\big[(-3)+1\big]^2}\\ \underline{\underline{f'(-3)=\frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

2. a) Ratkaise epäyhtälö $x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$.

b) Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$.

c) Ratkaise yhtälö $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Ratkaisu. **a)**

$$\begin{aligned}
x\sqrt{7} - 3 &\leq 4x \\
x\sqrt{7} - 4x &\leq 3 \\
(\sqrt{7} - 4)x &\leq 3 \quad \| : (\sqrt{7} - 4), \\
&\qquad\qquad \sqrt{7} - 4 \approx -1{,}35 < 0 \\
x &\geq \frac{3}{\sqrt{7} - 4}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx &= \Big/_{\!0}^{1} \ln|x+1| \\
&= \ln|1+1| - \ln|0+1| \\
&= \ln 2 - 0
\end{aligned}$$

Vastaus: $\ln 2$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Sijoitetaan $x^2 = u$

$$\begin{aligned}
u^2 - 3u - 4 &= 0 \\
(u-4)(u+1) &= 0
\end{aligned}$$

Tulon nollasääntö

$$u - 4 = 0 \quad \text{tai} \quad u + 1 = 0$$
$$u = 4 \qquad\qquad u = -1$$

Sijoitetaan $u = x^2$, saadaan

$$x^2 = 4 \quad \text{tai} \quad x^2 = -1$$
$$x = \pm 2 \qquad\qquad \text{ei ratkaisua}$$

Vastaus: $x = \pm 2$

3. a) Suoran vektorimuotoinen yhtälö on

$$\overrightarrow{OP} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} + t(2\bar{i} + \bar{j} + s\bar{k}),$$

missä $t \in \mathbb{R}$ on suoran parametri. Määritä sellainen luku s, että suora on tasossa $3x + 4y + 5z = 21$.

b) Olkoon F se funktion $f(x) = (2-x)^3$ integraalifunktio, jolle $F(0) = 0$. Määritä $F(1)$.

Ratkaisu. **a)** $\overrightarrow{OP} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} + t(2\bar{i} + \bar{j} + s\bar{k})$
Suora on tasossa $3x + 4y + 5z = 21$, kun sen kaksi pistettä ovat tasossa.
Kun $t = 0$, niin $\overrightarrow{OP} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$.
Sijoitetaan piste $P = (1, 2, 2)$ tason yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 &= 21 \\ 21 &= 21 \quad \text{TOSI} \end{aligned}$$

Piste $(1, 2, 2)$ on tasossa.
Valitaan $t = 1$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} + 1 \cdot (2\bar{i} + \bar{j} + s\bar{k}) \\ &= \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} + 2\bar{i} + \bar{j} + s\bar{k} \\ &= 3\bar{i} + 3\bar{j} + (2 + s)\bar{k} \end{aligned}$$

Sijoitetaan piste $(3, 3, 2 + s)$ tason yhtälöön

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5(2 + s) &= 21 \\ 9 + 12 + 10 + 5s &= 21 \\ 5s &= -10 \quad \| : 5 \\ s &= -2 \end{aligned}$$

Suora kulkee kahden tason pisteen kautta, kun $s = -2$.

Vastaus: <u>Suora on tasossa, kun $s = -2$.</u>

b) $f(x) = (2-x)^3$
Määritetään funktio $F(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (2-x)^3 \, dx \\ &= (-1) \cdot \int (-1) \cdot (2-x)^3 \, dx \\ &= -\frac{1}{4}(2-x)^4 + C \end{aligned}$$

Määritetään vakio C siten, että $F(0) = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(2-0)^4 + C &= 0 \\ -4 + C &= 0 \\ C &= 4 \end{aligned}$$

Funktio saa muodon $F(x) = -\frac{1}{4}(2-x)^4 + 4$. Lasketaan funktion arvo, kun $x = 1$

$$\begin{aligned} F(1) &= -\frac{1}{4}(2-1)^4 + 4 \\ F(1) &= -\frac{1}{4} + 4 \\ F(1) &= 3\frac{3}{4} \end{aligned}$$

4. Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja kulkee pisteiden $(-1, 12)$, $(0, 5)$ ja $(2, -3)$ kautta. Määritä lausekkeen $a + b + c$ arvo.

Ratkaisu. Jokaisen pisteen täytyy toteuttaa paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ yhtälö.

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 12 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 12 & (1) \\ c = 5 & (2) \\ 4a + 2b + c = -3 & (3) \end{cases}$$

Sijoitetaan (2) yhtälöihin (1) ja (3).

$$\begin{cases} a - b + 5 = 12 \\ 4a + 2b + 5 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 7 \quad \| \cdot 2 & (4) \\ 4a + 2b = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 2b = 14 \\ 4a + 2b = -8 \end{cases}$$

$$6a = 6 \quad \| : 6$$
$$a = 1$$

Sijoitetaan $a = 1$ yhtälöön (4).

$$1 - b = 7$$
$$-b = 6 \quad \| \cdot (-1)$$
$$b = -6$$

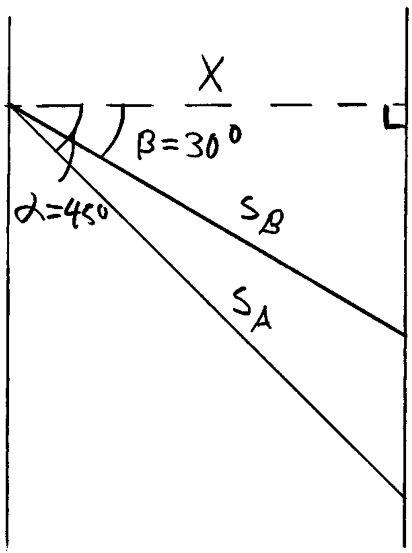
Kysytty summa

$$a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$$

Vastaus: Lausekkeen $a + b + c$ arvo on 0.

5. Vene A ylittää joen 45 asteen kulmassa nopeudella 16 km/h, ja vene B ylittää joen 30 asteen kulmassa nopeudella 14 km/h. Molemmat kulmat on mitattu joen poikkisuunnasta. Veneet lähtevät yhtä aikaa. Kumpi veneistä pääsee vastarannalle aikaisemmin?

Ratkaisu.



Joen leveys on x, $x > 0$.
Veneen A nopeus $v_\mathrm{A} = 16\,\mathrm{km/h}$.
Veneen B nopeus $v_\mathrm{B} = 14\,\mathrm{km/h}$.
Veneen A kulkema matka $s_\mathrm{A} = \dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{x}{\cos 45^\circ}$
Veneen B kulkema matka $s_\mathrm{B} = \dfrac{x}{\cos\beta} = \dfrac{x}{\cos 30^\circ}$
Veneiden joen ylitykseen käyttämät ajat: $t = \dfrac{s}{v}$

$$\begin{aligned}
t_\mathrm{A} &= \frac{s_\mathrm{A}}{v_\mathrm{A}} \\
&= \frac{x/\cos 45^\circ}{16} \\
&= \frac{x}{16\cdot\cos 45^\circ} \\
&= 0{,}0883\ldots\cdot x \\
&\approx 0{,}088x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{B}} &= \frac{s_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{B}}} \\ &= \frac{x/\cos 30^\circ}{14} \\ &= \frac{x}{14 \cdot \cos 30^\circ} \\ &= 0{,}0824\ldots \cdot x \\ &\approx 0{,}082x \end{aligned}$$

Koska $t_{\mathrm{B}} < t_{\mathrm{A}}$, pääsee vene B aikaisemmin vastarannalle.

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Vene B pääsee vastarannalle aikaisemmin.}}}$

6. Monivalintatestissä on 25 väitettä ja kussakin kaksi vastausvaihtoehtoa. Opiskelija tietää oikean vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput. Millä todennäköisyydellä hän läpäisee testin, kun läpipääsyyn vaaditaan 15 oikeaa vastausta?

Ratkaisu. Opiskelijan täytyy siis arvata oikein vähintään viiteen tehtävään viidestätoista. Merkitään

$n = 15$ on tehtävien määrä
k on oikein arvattujen vastausten määrä
$p = \frac{1}{2}$ on todennäköisyys vastata oikein yhteen tehtävään
$q = \frac{1}{2}$ on todennäköisyys vastata väärin yhteen tehtävään

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
P(k \geq 5) &= 1 - P(\overline{k \geq 5}) \qquad \text{VASTATAPAHTUMAN TN.}\\
&= 1 - P(k < 5)\\
&= 1 - P(k = 0 \text{ tai } k = 1 \text{ tai } k = 2 \text{ tai } k = 3 \text{ tai } k = 4)\\
&= 1 - \left[P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) + P(k=3) + P(k=4)\right]
\end{aligned}$$

Sovelletaan binomitodennäköisyyden kaavaan $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, saadaan

$$\begin{aligned}
P(k \geq 5) = 1 - \Big[&\tbinom{15}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{15} + \tbinom{15}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{14} + \tbinom{15}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{13}\\
&+ \tbinom{15}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{12} + \tbinom{15}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{11}\Big]\\
= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{15} &\left[\tbinom{15}{0} + \tbinom{15}{1} + \tbinom{15}{2} + \tbinom{15}{3} + \tbinom{15}{4}\right]\\
= 0{,}94076\ldots&
\end{aligned}$$

Vastaus: Opiskelija läpäisee testin todennäköisyydellä 0,94.

7. Määritä funktion

$$f(x) = \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

suurin ja pienin arvo. Missä pisteissä suurin arvo saavutetaan?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x \\ f(x) &= \cos x - \frac{1}{2}\cdot(2\cos^2 x - 1) \\ f(x) &= \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Funktio $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x - (-\sin x)\cdot 2\cos x \\ &= \sin x \cdot 2\cos x - \sin x \\ &= \sin x(2\cos x - 1) \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \sin x(2\cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \\ x &= n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} 2\cos x - 1 &= 0 \\ 2\cos x &= 1 \quad \| :2 \\ \cos x &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Osoitetaan, että funktio $f(x)$ on jaksollinen jaksolla 2π.
Kosinifunktio on jaksollinen:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(x + 2\pi) \quad \|()^2 \\ \cos^2 x &= \cos^2(x + 2\pi), \end{aligned}$$

joten

$$f(x) = \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2} = \cos(x + 2\pi) - \cos^2(x + 2\pi) + \frac{1}{2} = f(x + 2\pi).$$

Funktion suurimman ja pienimmän arvon määrittämisessä voidaan siis tutkia suljettua väliä $[0, 2\pi]$.

Suljetulla välillä jatkuvan ja derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo löytyvät derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \cos 0 - \cos^2 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \frac{3}{4} \qquad \text{SUURIN ARVO} \\
f(\pi) &= -\frac{3}{2} \qquad \text{PIENIN ARVO} \\
f\left(-\tfrac{\pi}{3} + 2\pi\right) &= f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \qquad \text{SUURIN ARVO} \\
f(2\pi) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Suurin arvo löytyy pisteistä

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vastaus: Pienin arvo on $-\frac{3}{2}$ ja suurin arvo on $\frac{3}{4}$.
Suurin arvo saavutetaan pisteissä $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{3}{4}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. Jono (a_n) on aritmeettinen jono. Osoita, että jono (b_n), missä $b_n = 3^{a_n}$, on geometrinen. Millä jonoa (a_n) koskevalla ehdolla jono (b_n) on aidosti vähenevä?

Ratkaisu. Jono (a_n) on aritmeettinen, joten

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Tutkitaan kahden peräkkäisen jäsenen suhdetta jonossa (b_n).

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{3^{a_{n+1}}}{3^{a_n}} \\ &= 3^{a_{n+1}-a_n} \\ &= 3^d\end{aligned}$$

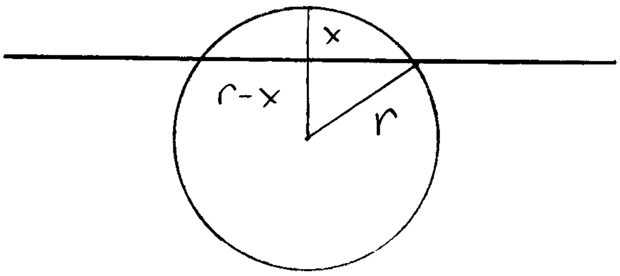
Peräkkäisten jäsenten suhde on n:stä riippumaton vakio 3^d, joten jono (b_n) on geometrinen. Kaikki jonon (b_n) jäsenet ovat positiivisia, koska $b_n = 3^{a_n} > 0$. Lukujono (b_n) on aidosti vähenevä, jos $b_{n+1} < b_n$. Tutkitaan milloin epäyhtälö on voimassa.

$$\begin{aligned}b_{n+1} &< b_n \quad \| : b_n \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} &< 1 \quad \| \text{ Sij. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3^d \\ 3^d &< 1 \quad \| \ln() \\ \ln 3^d &< \ln 1 \\ d \ln 3 &< 0 \quad \| : \ln 3, \quad \ln 3 \approx 1{,}1 > 0 \\ d &< 0\end{aligned}$$

Vastaus: Jono (b_n) on aidosti vähenevä, kun (a_n) on aidosti vähenevä, eli kun jonon (a_n) peräkkäisten jäsenten erotus $d < 0$.

9. Arkhimedeen lain mukaan vedessä kelluvan esineen syrjäyttämän veden paino ja esineen paino ovat samat. Pyöreästä ja tasapaksusta puutukista jää veden yläpuolelle sen halkaisijasta viidesosa. Määritä tukin tiheys. Veden tiheytenä käytetään arvoa 1,00 kg/dm³.

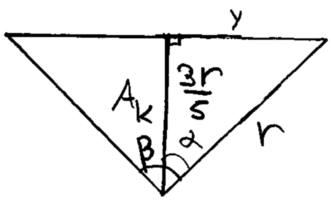
Ratkaisu.



Merkitään halkaisijaa d:llä.

$$x = \frac{d}{5} \quad \| \text{ Sij. } d = 2r$$
$$x = \frac{2r}{5}$$

Lasketaan keskuskolmion A_k ala



Pythagoraan lauseen mukaan

$$y^2 + \left(\frac{3r}{5}\right)^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - \frac{9}{25}r^2$$
$$y^2 = \frac{16}{25}r^2$$
$$y = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{16}{25}r^2}$$
$$y = \frac{4}{5}r$$

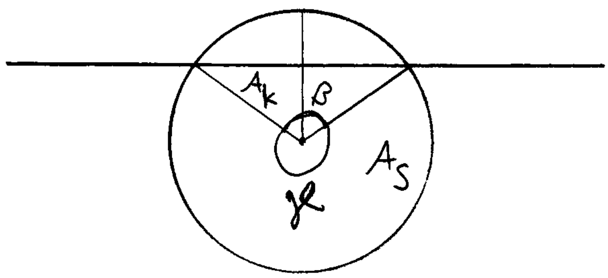
Kolmion pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2y \cdot \frac{3}{5}r}{2} \\ &= y \cdot \frac{3}{5}r \\ &= \frac{12}{25}r^2 \end{aligned}$$

Lasketaan kulmat α ja β.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{3}{5}r}{r} \\ \cos\alpha &= \frac{3}{5} \\ \alpha &= 53{,}130\ldots^\circ \\ \beta &= 2\alpha \\ &= 106{,}260\ldots^\circ \end{aligned}$$

Lasketaan sektorin A_s ala



$$\begin{aligned} \gamma &= 360^\circ - \beta \\ &= 253{,}739\ldots^\circ \\ A_s &= \frac{\gamma}{360^\circ}\pi r^2 \end{aligned}$$

Pinnan alle jäävän osuuden pinta-ala:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_k + A_s \\ &= \frac{12}{25}r^2 + \frac{\gamma}{360^\circ}\pi r^2 \\ &= \left(\frac{12}{25} + \frac{\gamma}{360^\circ}\pi\right) r^2 \end{aligned}$$

Koko poikkipinta-ala:

$$A_2 = \pi r^2$$

Tukin tilavuus on nyt

$$V_2 = A_2 h$$

ja tukin syrjäyttämän veden tilavuus on

$$V_1 = A_1 h,$$

missä h on tukin pituus. Merkitään

$$\begin{aligned}&\rho_1 = 1{,}00\,(\mathrm{kg/dm^3}) \text{ on veden tiheys}\\ &\rho_2 \text{ on tukin tiheys.}\end{aligned}$$

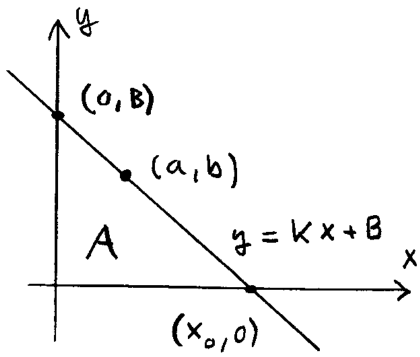
Kappaleen massa on suoraan verrannollinen kappaleen painoon, joten Arkhimedeen lain mukaan on tällöin

$$\begin{aligned}\rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2\\ \rho_1 A_1 h &= \rho_2 A_2 h \quad \| : h\\ \rho_1 A_1 &= \rho_2 A_2 \quad \| : A_2\\ \rho_2 &= \frac{A_1}{A_2} \cdot \rho_1\\ &= \frac{\left(\frac{12}{25} + \frac{\gamma}{360^\circ}\pi\right) r^2}{\pi r^2} \cdot \rho_1\\ &= \frac{\left(\frac{12}{25} + \frac{253{,}739\ldots^\circ}{360^\circ}\pi\right) r^2}{\pi r^2} \cdot 1{,}00\\ &= 0{,}8576\ldots\\ &\approx 0{,}86\,(\mathrm{kg/dm^3})\end{aligned}$$

Vastaus: Puun tiheys on $0{,}86\,\mathrm{kg/dm^3}$.

10. Suora kulkee kiinteän pisteen (a, b), $a > 0$, $b > 0$, kautta ja muodostaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa kolmion. Mikä on tällaisen kolmion pienin mahdollinen pinta-ala?

Ratkaisu.



Suoran täytyy olla laskeva, jotta kolmio muodostuisi, eli $k < 0$. y-akselin leikkauspiste on $(0, B)$. Määritetään x-akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned} 0 &= kx_0 + B \\ -kx_0 &= B \quad \| : (-k) \\ x_0 &= -\frac{B}{k} \end{aligned}$$

Kolmion sivujen pituudet ovat x_0 ja B, joten kolmion ala on

$$A = \frac{1}{2}x_0 B = \frac{1}{2}\left(-\frac{B}{k}\right)B = -\frac{B^2}{2k} \tag{1}$$

Suora kulkee pisteen (a, b) kautta, joten

$$\begin{aligned} y - b &= k(x - a) \\ y &= kx - ak + b \end{aligned}$$

Suoran yhtälön vakio B on siis $B = -ak + b$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (1), saadaan

$$\begin{aligned} A(k) &= -\frac{(-ak + b)^2}{2k} \\ &= -\frac{a^2k^2 - 2abk + b^2}{2k} \\ &= -\frac{1}{2}a^2k + ab - \frac{1}{2}b^2k^{-1} \end{aligned}$$

Tehtävänä on etsiä funktion $A(k)$ pienin arvo välillä $k \in \,]-\infty, 0[$.

$$\begin{aligned} A'(k) &= -\frac{1}{2}a^2 + 0 - \frac{1}{2}b^2 \cdot (-1) \cdot k^{-2} \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 k^{-2} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat

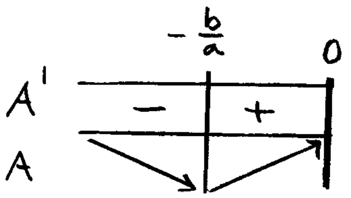
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 k^{-2} &= 0 \quad \| \cdot 2k^2 \\ -a^2k^2 + b^2 &= 0 \\ -a^2k^2 &= -b^2 \quad \| : (-a^2) \\ k^2 &= \frac{b^2}{a^2} \\ k &= \pm\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Vain negatiivinen nollakohta on tarkasteluvälillä. Tutkitaan derivaatan merkkiä nollakohdan eri puolilla kohdissa $-2\frac{b}{a}$ ja $-\frac{1}{2}\frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} A'\left(-\tfrac{2b}{a}\right) &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \cdot \left(-\frac{2b}{a}\right)^{-2} \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\cancel{b^2} \cdot \frac{a^2}{4\cancel{b^2}} \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}\cancel{a^2} \\ &= -\frac{3}{8}a^2 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'\left(-\tfrac{b}{2a}\right) &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^{-2} \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\cancel{b^2} \cdot \frac{4a^2}{\cancel{b^2}} \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + 2\cancel{a^2} \\ &= \frac{3}{2}a^2 > 0 \end{aligned}$$

Kulkukaavio



Pienin arvo löytyy kohdasta $-\frac{b}{a}$. Pinta-ala on tällöin

$$\begin{aligned} A\left(-\tfrac{b}{a}\right) &= -\frac{1}{2}a^2\left(-\frac{b}{a}\right) + ab - \frac{1}{2}b^2 \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}ab + ab + \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{a}{b} \\ &= \frac{1}{2}ab + ab + \frac{1}{2}ab \\ &= 2ab \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmion pienin mahdollinen pinta-ala on $2ab$.

11. Olkoot A, B ja C lauseita. Tutki ovatko lauseet

$$\textbf{a)}\quad A \vee B, \qquad \textbf{b)}\quad (A \vee \neg B) \vee (C \vee B)$$

tautologioita.

Ratkaisu. **a)**

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Vastaus: Ei ole tautologia.

b)

A	B	C	$(A$	$\vee$	$\neg B)$	$\vee$	$(C$	$\vee$	$B)$
1	1	1		1	0	1		1	
1	1	0		1	0	1		1	
1	0	1		1	1	1		1	
0	1	1		0	0	1		1	
1	0	0		1	1	1		0	
0	1	0		0	0	1		1	
0	0	1		1	1	1		1	
0	0	0		1	1	1		0	

Vastaus: On tautologia.

12. Määritä a siten, että polynomi

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + a$$

on jaollinen binomilla $2x - 1$. Määritä tätä a:n arvoa vastaavat yhtälön $P(x) = 0$ juuret.

Ratkaisu. Tutkitaan jakojäännöstä

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x^2 - 4x - 2 \\
\hline
2x - 1 & 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 \qquad + a \\
 & \overset{-}{(+)}2x^4 \overset{+}{(-)} x^3 \\
\cline{2-2}
 & \quad -2x^3 - 7x^2 \qquad + a \\
 & \quad \overset{+}{(-)}2x^3 \overset{-}{(+)} x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -8x^2 \qquad + a \\
 & \qquad \overset{+}{(-)}8x^2 \overset{-}{(+)} 4x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -4x + a \\
 & \qquad\qquad \overset{+}{(-)}4x \overset{-}{(+)} 2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad a - 2
\end{array}
$$

Jakojäännöksen täytyy olla nolla, jotta $P(x)$ on jaollinen binomilla $2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
a - 2 &= 0 \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

Kun $a = 2$, voidaan $P(x)$ jakaa tekijöihin $P(x) = (2x - 1)(x^3 - x^2 - 4x - 2)$. Ratkaistaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 0 \\
(2x - 1)(x^3 - x^2 - 4x - 2) &= 0
\end{aligned}
$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$
\begin{aligned}
2x - 1 &= 0 \\
2x &= 1 \quad \| : 2 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

tai

$$x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$$

Merkitään $q(x) = x^3 - x^2 - 4x - 2$. Jaetaan $q(x)$ tekijöihin, jotta yhtälö voidaan ratkaista. Huomataan, että

$$q(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 2 = 0,$$

joten $q(x)$:llä on nollakohta $x = -1$ ja siten polynomilla $q(x)$ on tekijälauseen mukaan tekijä $x + 1$.
(Huomautus lukijalle: nollakohta keksittiin kokeilemalla laskimella lukuja 1, -1, 2 ja -2. Näitä lukuja lähdettiin kokeilemaan, koska q:n vakiotermi on -2 ja vakiotermi on aina juurien tulo.)
Edelleen

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\quad x^2 - 2x - 2 \\ \hline
x+1 & x^3 - x^2 - 4x - 2 \\
 & \overset{-}{(+)}x^3 \overset{-}{(+)}x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -2x^2 - 4x - 2 \\
 & \quad \overset{+}{(-)}2x^2 \overset{+}{(-)}2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -2x - 2 \\
 & \qquad\quad \overset{+}{(-)}2x \overset{+}{(-)}2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Jakolaskun perusteella saadaan

$$q(x) = (x + 1)(x^2 - 2x - 2)$$

Yhtälö $q(x) = 0$ tulee muotoon

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

tai

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \\
x &= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\
x &= 1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Oltava $a = 2$, jotta $P(x)$ on jaollinen binomilla $2x - 1$. Tällä a:n arvolla yhtälön $P(x) = 0$ juuret ovat $x = -1$, $x = 1 - \sqrt{3}$, $x = \frac{1}{2}$ ja $x = 1 + \sqrt{3}$.

13. Määritä sellainen kerroin a, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-3x}, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Mikä on tällöin kertymäfunktion lauseke? Laske $P(X \geq t)$, kun $t \geq 0$.

Ratkaisu.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-3x}, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

$f(x)$ on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, jos

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ ae^{-3x} &\geq 0 \\ a &\geq 0 \end{aligned}$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{1}$$

Lasketaan integraali

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} ae^{-3x}\,dx \\ &= 0 + a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \int_{0}^{\infty} -3e^{-3x}\,dx \\ &= -\frac{a}{3} \cdot \lim_{b \to \infty} \Big/_{0}^{b} e^{-3x} \\ &= -\frac{a}{3} \cdot \lim_{b \to \infty} \left(e^{-3b} - e^{0}\right) \\ &= -\frac{a}{3}(0 - 1) \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Jotta ehto (1) täyttyisi, pitää olla

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} &= 1 \quad \| \cdot 3 \\ a &= 3. \end{aligned}$$

Kertymäfunktio on

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Kun $x \geq 0$, on

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^x 3e^{-3t}\,dt\\ &= (-1)\cdot\int_0^x -3e^{-3t}\,dt\\ &= -\bigg/_{0}^{x} e^{-3t}\\ &= -(e^{-3x} - e^0)\\ &= 1 - e^{-3x}.\end{aligned}$$

Kun $x < 0$, on

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Saadaan

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & \text{kun } x \geq 0,\\ 0, & \text{kun } x < 0.\end{cases}$$

Kertymä:

$$\begin{aligned}P(X \geq t) &= 1 - P(x \leq t)\\ &= 1 - (1 - e^{-3t})\\ &= e^{-3t}\end{aligned}$$

Vastaus: $a = 3$, kertymäfunktio on $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & \text{kun } x \geq 0,\\ 0, & \text{kun } x < 0\end{cases}$
ja $P(X \geq t) = e^{-3t}$.

⋆**14. a)** Osoita, että funktiolla

$$f(x) = \ln x + x + 1, \quad x > 0,$$

on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. (2 p.)

b) Määritä käänteisfunktion derivaatta $g'(2)$. (2 p.)

c) Missä pisteissä funktion f kuvaaja leikkaa käänteisfunktion kuvaajan? (3 p.)

d) Kuinka suuressa kulmassa kuvaajat leikkaavat toisensa? (2 p.)

Ratkaisu. **a)** Tutkitaan funktion $f(x)$ kulkua.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x + x + 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} + 1 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + 1 &= 0 \\ \frac{1}{x} &= -1 \quad \|()^{-1} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia, kun $x > 0$, joten se on kaikkialla saman merkkinen.

$$f'(1) = \ln 1 + 1 + 1 = 0 + 2 = 2 > 0$$

Derivaatta on kaikilla $x > 0$ positiivinen, joten $f(x)$ on aidosti kasvava. Tällöin $f(x)$:llä on käänteisfunktio.

b) Käänteisfunktion derivaatalle pätee

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{kun } y_0 = f(x_0).$$

Tässä tilanteessa $y_0 = 2$, joten

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2 \\ \ln x_0 + x_0 + 1 &= 2 \\ \ln x_0 + x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1,$$

joten $x_0 = 1$ on yhtälön ratkaisu. Siten

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(2) &= \frac{1}{f'(1)}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{1}+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{g'(2) = \frac{1}{2}}}$

c) Funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen, joten kuvaajat leikkaavat niissä kohdissa, joissa ne leikkaavat peilaussuoran $y = x$. Riittää siis etsiä käyrän $y = f(x)$ ja suoran $y = x$ leikkauspisteet.

$$\begin{aligned} f(x) &= x\\ \ln x + x + 1 &= x\\ \ln x &= -1 \quad \| e^{()}\\ x &= e^{-1}\end{aligned}$$

Tällöin y-koordinaatti on $y = x = e^{-1}$.

Vastaus: Funktion f kuvaaja leikkaa käänteisfunktion kuvaajan pisteessä (e^{-1}, e^{-1}).

d) Tarvitaan kuvaajien tangenttien kulmakertoimet. Ne saadaan derivaattojen arvoista leikkauspisteessä (e^{-1}, e^{-1}).

$$f'(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} + 1 = e + 1$$

Lasketaan f^{-1}:n derivaatta kuten b-kohdassa. Nyt $f(e^{-1}) = e^{-1}$, joten

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)(e^{-1}) &= \frac{1}{f'(e^{-1})}\\ &= \frac{1}{e+1}\end{aligned}$$

Tangenttien välinen kulma

$$
\begin{aligned}
\tan\varphi &= \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_2 1 k_2}\right| \\
\tan\varphi &= {}^{e+1)}\left|\frac{e+1-\frac{1}{e+1}}{1+(e+1)\frac{1}{e+1}}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{(e+1)^2 - \frac{\cancel{e+1}}{\cancel{e+1}}}{(e+1)+(e+1)\frac{1}{\cancel{e+1}}\cancel{(e+1)}}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{e^2+2e+1-1}{e+1+e+1}\right| \\
\tan\varphi &= \frac{e^2+2e}{2e+2} \\
\tan\varphi &= 1{,}72467\ldots \\
\varphi &= 59{,}89\ldots^\circ
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kuvaajat leikkaavat toisensa 59,9° kulmassa.

⋆**15. a)** Miten määritellään tylppäkulmainen kolmio? (2 p.)

b) Johda kolmion pinta-alan kaava käyttäen hyväksi seuraavia tietoja:

– Suorakulmion pinta-ala on ab, kun a ja b ovat suorakulmion sivujen pituudet.

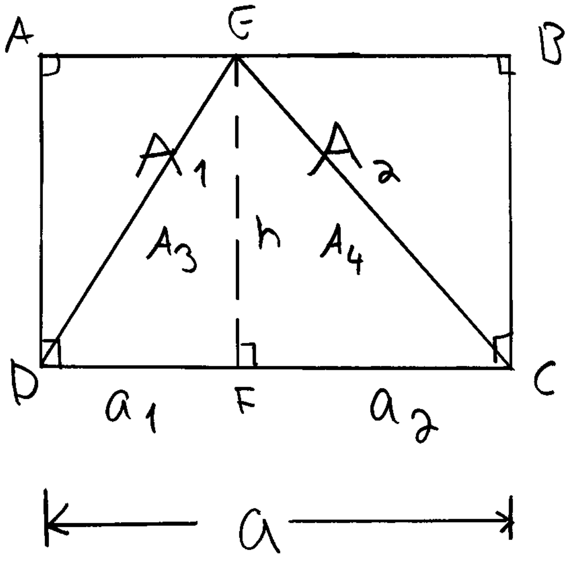
– Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.

(4 p.)

c) Johda puolisuunnikkaan pinta-alan kaava. (3 p.)

Ratkaisu. **a)** Tylppäkulmaisessa kolmiossa yksi kulma on suurempi kuin 90°.

b) Kolmion CDE suurin kulma on ∢E ja se voi olla joko terävä, suora tai tylppä kulma. Piirretään kolmion ympärille suorakulmio ABCD.



Määritetään kolmion CDE pinta-alan lauseke pituuksien h ja a avulla.
Suorakulmion $AEFD$ pinta-ala on $A_1 = a_1 h$.
Suorakulmion $EBCF$ pinta-ala on $A_2 = a_2 h$.
Kolmion DEF pinta-ala on

$$A_3 = \frac{A_1}{2} = \frac{a_1 h}{2}.$$

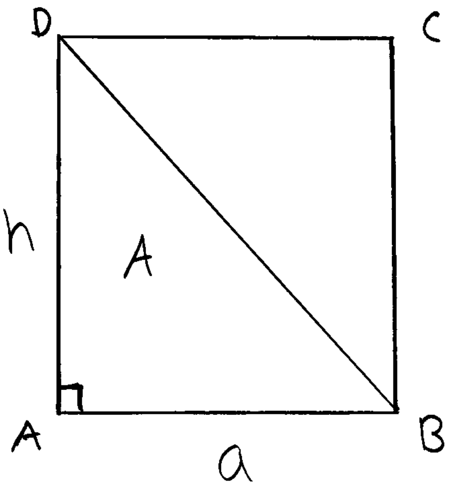
Kolmion CEF pinta-ala on

$$A_4 = \frac{A_2}{2} = \frac{a_2 h}{2}.$$

Kolmion CDE pinta-ala on

$$A = A_3 + A_4$$
$$A = \frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2}$$
$$A = \frac{a_1 h + a_2 h}{2}$$
$$A = \frac{(a_1 + a_2)h}{2}$$
$$\underline{\underline{A = \frac{ah}{2}}}$$

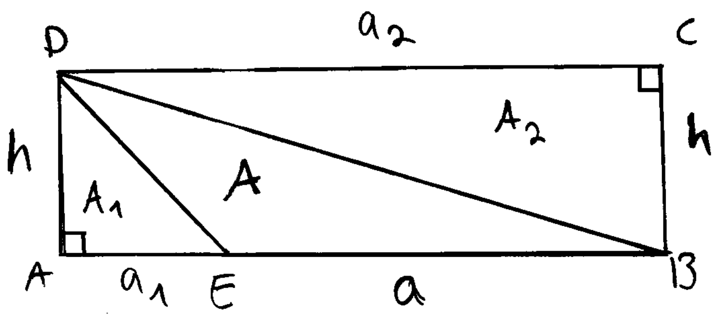
Johdetaan seuraavaksi pinta-alan kaava tapauksessa, jossa korkeusjana on suorakulmaisen kolmion kateetti.



Jos kolmio ABD on suorakulmainen ja ∢A = 90°, niin kateetit ovat sivut AB ja AD. Suorakulmion ABCD pinta-ala on tällöin $A_1 = ah$ ja kolmion ABD pinta-ala

$$A = \frac{A_1}{2}$$
$$\underline{\underline{A = \frac{ah}{2}}}$$

Johdetaan edellisiä tuloksia hyväksi käyttäen pinta-ala vielä siinä tapauksessa, jossa korkeusjana tulee kohtisuorasti kannan jatkeelle.



Kolmion kanta $a = a_2 - a_1$.
Kolmion ADE pinta-ala on

$$A_1 = \frac{a_1 h}{2}$$

Kolmion BCD pinta-ala on

$$A_2 = \frac{a_2 h}{2}$$

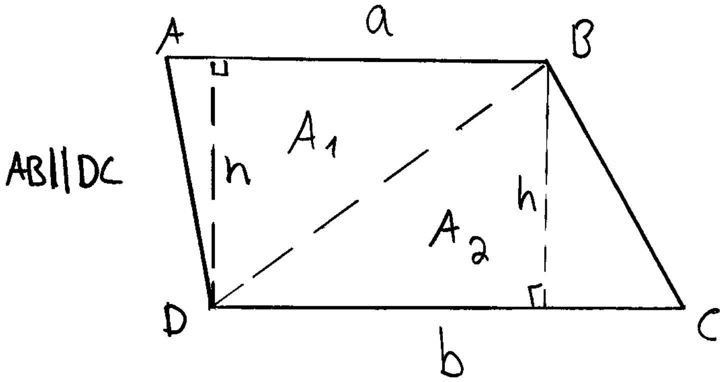
Suorakulmion ABCD pinta-ala on

$$A_s = a_2 h$$

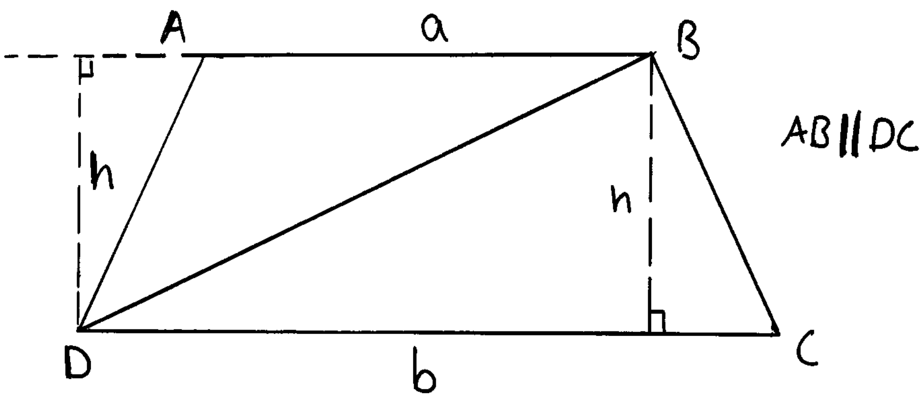
Kolmion BDE pinta-ala A saadaan vähentämällä suorakulmion ABCD pinta-alasta kolmioiden ADE ja BCD alat, eli

$$A = A_s - (A_1 + A_2)$$
$$A = a_2 h - \left(\frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2}\right)$$
$$A = \frac{a_2 h}{2} - \frac{a_1 h}{2}$$
$$A = \frac{(a_2 - a_1)\,h}{2} \quad \| \text{ Sij. } a_2 - a_1 = a$$
$$\underline{\underline{A = \frac{ah}{2}}}$$

c) Täytyy tutkia kaksi tapausta



Tapaus 1



Tapaus 2

Kolmion ABD pinta-ala on molemmissa tapauksissa

$$A_1 = \frac{ah}{2}.$$

Kolmion BCD pinta-ala on molemmissa tapauksissa

$$A_2 = \frac{bh}{2}.$$

Puolisuunnikkaan $ABCD$ pinta-ala on molemmissa tapauksissa

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{ah + bh}{2}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2}(a + b)h}}$$