Lääkiskurssi

- 5-8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa **1.10., 3.11., 7.1., 16.2.** tai **30.3.** Opetusajaksi voi yleensä valita joko 9.30-12.30 tai 13-16 tai 17-20.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta ja pitkällä kurssilla lisäksi 6 yo-koetta
- Pitkä kurssi **16.2.-22.5.** ja kevätkurssi **30.3.-22.5.**

Pitkä matematiikka, kevät 2015

Mallivastaukset, 18.3.2015

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään he opettavat MAFY:n kursseilla ympäri vuoden ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Otte Heinävaara, Olli Hirviniemi, Sami Jouttijärvi, Sakke Suomalainen ja Matti Virolainen. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. Piirrä kolme yksikköympyrää ja merkitse niihin seuraavat kulmat ja vastaavat kehäpisteet:

   a) $405°$
   b) $-120°$
   c) $\frac{3\pi}{4}$ rad

Ratkaisu.
Kussakin kohdassa kehäpisteen y-koordinaatti on kulman sini ja x-koordinaatti kulman kosini. Koordinaatit a-kohdassa:

$$x_a = \cos(405°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$y_a = \sin(405°) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{1p}$$

Koordinaatit b-kohdassa:

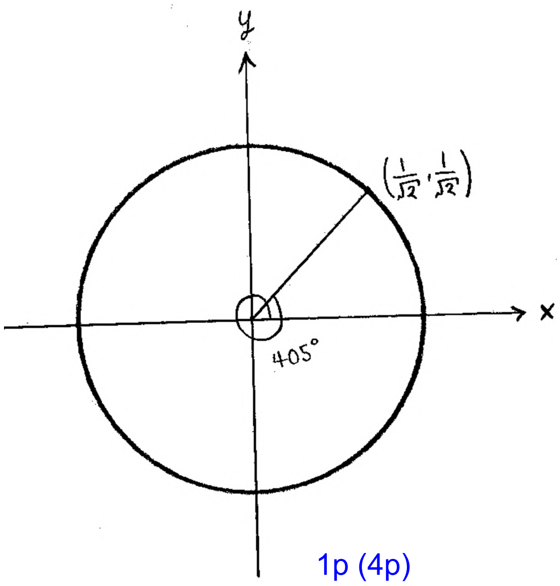
$$x_b = \cos(-120°) = -\frac{1}{2}$$
$$y_b = \sin(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{1p (2p)}$$

Koordinaatit c-kohdassa:

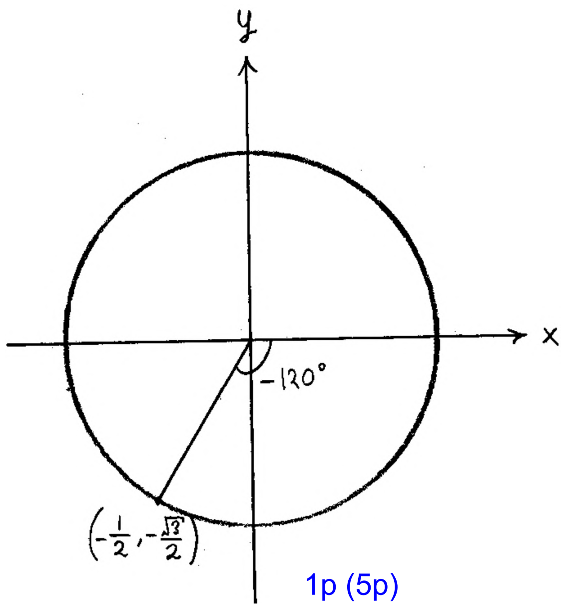
$$x_c = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$y_c = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{1p (3p)}$$

Piirretään yksikköympyrät ja merkitään kehäpisteet.

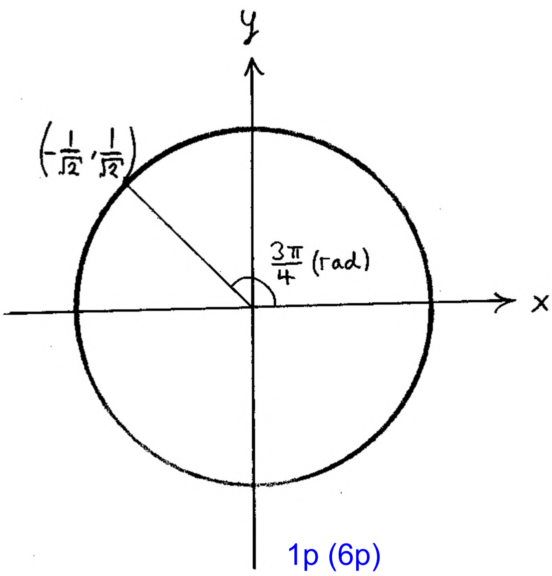
(a)



(b)



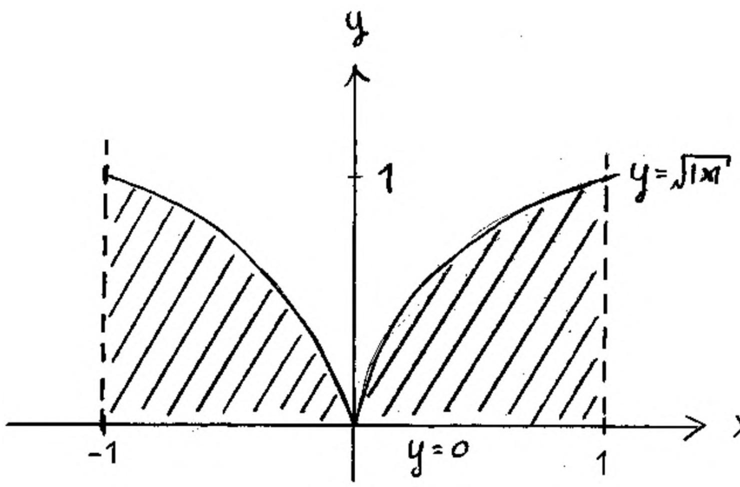
(c)



2. a) Piirrä kuva epäyhtälöiden $0 \leq y \leq \sqrt{|x|}$ määräämästä tasoalueesta, kun $-1 \leq x \leq 1$.
   b) Ratkaise yhtälö $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$.

Ratkaisu.

a) Tasoaluetta rajoittaa alhaalta x-akseli, vasemmalta suora $x = -1$ ja oikealta suora $x = 1$. Ylhäältä sitä rajoittaa käyrä $y = \sqrt{|x|}$, eli käyrät $y = \sqrt{x}$, kun $x \geq 0$ ja $y = \sqrt{-x}$, kun $x < 0$. 2p



1p (3p)

b) Tarkistetaan, milloin neliöjuurilausekkeet on määritelty:

$$\begin{aligned} 1+x &\geq 0 \qquad \text{ja} \qquad 2x \geq 0 \\ x &\geq -1 \qquad \text{ja} \qquad x \geq 0. \end{aligned}$$

Yhtälö on määritelty, kun $x \geq 0$. Tällöin myös yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten se voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin siten, että yhtäsuuruus säilyy.

$$\begin{aligned} x\sqrt{1+x} &= \sqrt{2x} \quad \|(\quad)^2 \\ x^2(1+x) &= 2x \quad \text{1p (4p)} \\ x^2 + x^3 &= 2x \\ x^3 + x^2 - 2x &= 0 \\ x(x^2 + x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasääntö:

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-1+3}{2} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-1-3}{2}$$

$$x = 1 \qquad \text{tai} \qquad x = -2 < 0$$

$x = 1$ 1p (5p)

$x = -2 < 0$ ei kelpaa

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 1.}}$ 1p (6p)

3. Vieraita kieliä äidinkielenään puhuvien Helsingin asukkaiden lukumäärä kasvoi vuosittain 7,5 prosenttia aikavälillä 2003–2013. Vuonna 2013 arvioitiin, että vuosina 2013–2033 kyseessä oleva lukumäärä vielä kaksinkertaistuu. Laske vieraskielisten asukkaiden lukumäärän keskimääräinen vuosittainen kasvuprosentti näiden 30 vuoden aikana.

Ratkaisu. Merkitään vuoden 2003 vieraskielisten helsinkiläisten määrää a:lla.
Vuonna 2013 vieraskielisiä oli $1{,}075^{10} \cdot a$. 2p
Arvion mukaan vuonna 2033 vieraskielisiä on $2 \cdot 1{,}075^{10} \cdot a$. 1p (3p)
Merkitään keskimääräistä vuotuista kasvuprosenttia x:llä, ja $q = \left(1 + \frac{x}{100}\right)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
q^{30}a &= 2 \cdot 1{,}075^{10}a \quad \| : a \qquad \text{1p (4p)}\\
q^{30} &= 2 \cdot 1{,}075^{10} \quad \| \sqrt[30]{}\\
q &= \sqrt[30]{2 \cdot 1{,}075^{10}}\\
1 + \frac{x}{100} &= \sqrt[30]{2 \cdot 1{,}075^{10}} \qquad \text{1p (5p)}\\
\frac{x}{100} &= \sqrt[30]{2 \cdot 1{,}075^{10}} - 1 \quad \| \cdot 100\\
x &= 100 \cdot \sqrt[30]{2 \cdot 1{,}075^{10}} - 100\\
&= 4{,}83\ldots\\
&\approx 4{,}8
\end{aligned}
$$

Vastaus: Keskimääräinen vuotuinen kasvuprosentti on 4,8. 1p (6p)

4. Tarkastellaan yhtälöä $t^4x^2 + (t^2+1)x + 1 = 0$ parametrin $t \neq 0$ eri arvoilla.
   a) Ratkaise yhtälö, kun $t = 1$.
   b) Määritä kaikki ne parametrin $t \neq 0$ arvot, joilla yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. $t^4x^2 + (t^2+1)x + 1 = 0$, $t \neq 0$

a) Sijoitetaan $t = 1$

$$\begin{aligned} 1^4x^2 + (1^2+1)x + 1 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \quad \text{1p} \\ (x+1)^2 &= 0 \quad \text{1p (2p)} \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \quad \text{1p (3p)} \end{aligned}$$

b) Toisen asteen yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on ainakin yksi ratkaisu, kun diskriminantti $D = b^2 - 4ac \geq 0$ 1p (4p)

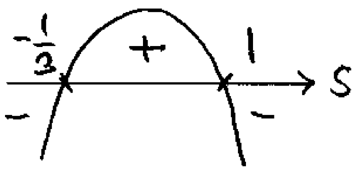
$$\begin{aligned} (t^2+1)^2 - 4 \cdot t^4 \cdot 1 &\geq 0, \quad t \neq 0 \\ t^4 + 2t^2 + 1 - 4t^4 &\geq 0 \quad \text{1p (5p)} \\ -3t^4 + 2t^2 + 1 &\geq 0 \quad \| \text{ sij. } s = t^2 > 0 \\ -3s^2 + 2s + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan nollakohdat:

$$-3s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)}$$

$$s = -\frac{1}{3} \text{ tai } s = 1$$



Epäyhtälön ratkaisu on

$$s \geq -\frac{1}{3} \quad \text{ja} \tag{1}$$

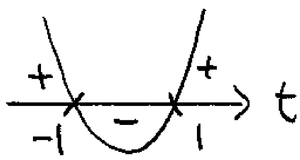
$$s \leq 1 \tag{2}$$

Epäyhtälö (1) toteutuu kaikilla t, koska $s = t^2 > 0$. Ratkaistaan epäyhtälö (2).

$$\begin{aligned} s &\leq 1 \\ t^2 &\leq 1, \quad t \neq 0 \\ t^2 - 1 &\leq 0 \\ (t-1)(t+1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Vasemman puolen nollakohdat

$$t = -1 \quad \text{tai} \quad t = 1$$



Epäyhtälön ratkaisu

$$-1 \leq t \leq 1, \quad t \neq 0.$$

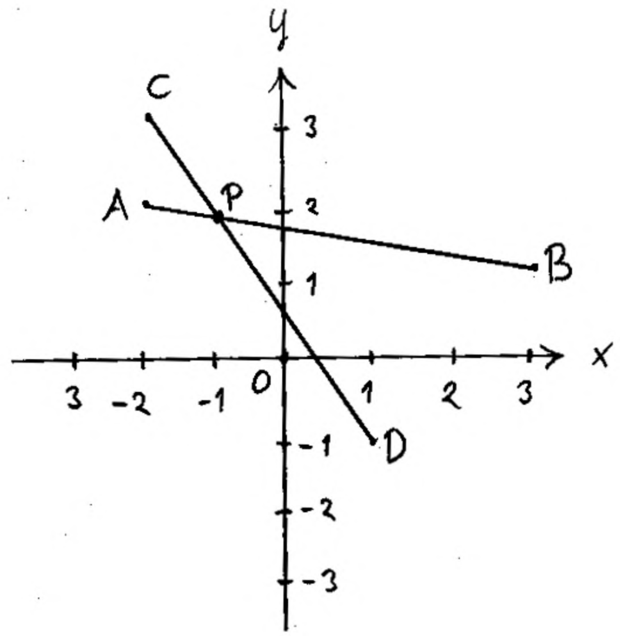
Vastaus: a) $\underline{\underline{x = -1}}$

b) $\underline{\underline{-1 \leq t \leq 1,\ t \neq 0}}$ 1p (6p)

5. Olkoot $A = (-2, 2), B = (3, 1), C = (-2, 3)$ ja $D = (1, -1)$. Laske janojen AB ja CD leikkauspisteen koordinaattien tarkat arvot.

Ratkaisu.

$\boxed{\text{TAPA 1}}$



Merkitään janojen leikkauspistettä P:llä.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP}\\ &= \overline{OA} + s\overline{AB}\\ &= -2\overline{i} + 2\overline{j} + s\left((3-(-2))\overline{i} + (1-2)\overline{j}\right)\\ &= (-2+5s)\overline{i} + (2-s)\overline{j}. \quad \text{2p}\end{aligned}$$

Toisaalta myös

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OC} + \overline{CP}\\ &= \overline{OC} + t\overline{CD}\\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} + t\left((1-(-2))\overline{i} + (-1-3)\overline{j}\right)\\ &= (-2+3t)\overline{i} + (3-4t)\overline{j}. \quad \text{1p (3p)}\end{aligned}$$

Vektorin komponenttien yksikäsitteisyydestä seuraa:

$$\begin{cases} -2+5s &= -2+3t \\ 2-s &= 3-4t \end{cases}$$ 1p (4p)

$$\begin{cases} 5s-3t &= 0 \\ -s+4t &= 1 \quad \| \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5s-3t &= 0 \\ -5s+20t &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 17t &= 5 \quad \| : 17 \\ t &= \frac{5}{17}. \\ -s+4t &= 1 \\ -s+4\cdot\frac{5}{17} &= 1 \\ s &= \frac{3}{17}. \end{aligned}$$ 1p (5p)

Täten leikkauspisteen P paikkavektori on

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= (-2+5s)\bar{i}+(2-s)\bar{j} \\ &= \left(-2+5\cdot\frac{3}{17}\right)\bar{i}+\left(2-\frac{3}{17}\right)\bar{j} \\ &= -\frac{19}{17}\bar{i}+\frac{31}{17}\bar{j}, \end{aligned}$$

joten $\underline{\underline{\text{leikkauspiste on }\left(-\frac{19}{17},\frac{31}{17}\right)}}$. 1p (6p)

TAPA 2

$$\begin{aligned} A &= (-2, 2) \\ B &= (3, 1) \\ C &= (-2, 3) \\ D &= (1, -1). \end{aligned}$$

Määritetään janojen AB ja CD kautta kulkevien suorien yhtälöt. Yleisesti

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Jana AB:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2, \quad y_1 = 2 \\ x_2 &= 3, \quad y_2 = 1. \end{aligned}$$ 1p

Suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y_{AB} - 2 &= \frac{1-2}{3-(-2)}(x - (-2)) \\ y_{AB} - 2 &= -\frac{1}{5}(x + 2) \\ y_{AB} &= -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}. \end{aligned}$$ 1p (2p)

Jana CD:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2, \quad y_1 = 3 \\ x_2 &= 1, \quad y_2 = -1. \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y_{CD} - 3 &= \frac{-1-3}{1-(-2)}(x - (-2)) \\ y_{CD} - 3 &= -\frac{4}{3}(x + 2) \\ y_{CD} &= -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$ 1p (3p)

Lasketaan suorien leikkauspiste.

$$\begin{cases} y_{AB} = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5} & (1) \\ y_{CD} = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5} &= -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \quad \| \cdot 15 \qquad \text{1p (4p)} \\ -3x + 24 &= -20x + 5 \\ 17x &= -19 \quad \| : 17 \\ x &= -\frac{19}{17}. \qquad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

$$y_{CD} = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{19}{17}\right) + \frac{1}{3} = \frac{31}{17} = y_{AB}.$$

Suorien leikkauspiste on $\left(-\frac{19}{17}, \frac{31}{17}\right)$. 1p (6p)
Saatu leikkauspiste on myös janojen AB ja CD leikkauspiste, sillä

$$\begin{aligned} x_A = -2 &< -\frac{19}{17} < 3 = x_B, \\ x_C = -2 &< -\frac{19}{17} < 1 = x_D, \\ y_A = 2 &> \frac{31}{17} > 1 = y_B \text{ ja} \\ y_C = 3 &> \frac{31}{17} > -1 = y_D. \end{aligned}$$

Vastaus: Janojen leikkauspiste on $\left(-\frac{19}{17}, \frac{31}{17}\right)$.

HUOMAUTUS LUKIJALLE: YTL:n "Hyvän vastauksen piirteet"-asiakirjan mukaan täysiin pisteisiin ei vaadita tarkastelua sille, onko suorien leikkauspiste myös kyseisten janojen leikkauspiste. Kuitenkin tarkastelu kannattaa tehdä, sillä tehtävänannosta ei varmuudella selviä, onko janojen leikkauspiste olemassa.

6. Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa $N(100, 15)$. Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä.

Ratkaisu. Merkitään satunnaisesti valitun henkilön älykkyysosamäärää X:llä. Halutaan löytää luku $a > 0$, jolle $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0{,}5$. Normitetaan:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{100 - a - 100}{15} = -\frac{a}{15} \\ Z_2 &= \frac{100 + a - 100}{15} = \frac{a}{15} \end{aligned}$$

Nyt

$$P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = P\left(-\frac{a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right),$$

missä Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa. 1p

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right) &= P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z < -\frac{a}{15}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right)\right) \\ &= 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 \qquad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 &= 0{,}5 \\ 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) &= 1{,}5 \quad \| : 2 \\ P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) &= 0{,}75 \qquad \text{1p (3p)} \end{aligned}$$

Laskimesta saadaan

$$\begin{aligned} \frac{a}{15} &= 0{,}67449\ldots \quad (\text{tai taulukosta } 0{,}67) \quad \| \cdot 15 \qquad \text{1p (4p)} \\ a &= 10{,}117\ldots \qquad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

Väli on $[100 - 10{,}117\ldots; 100 + 10{,}117\ldots] = [89{,}88\ldots; 110{,}11\ldots] \approx [90, 110]$.

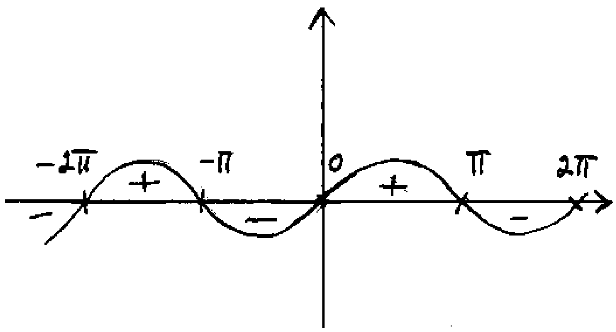
Vastaus: $\underline{\underline{\text{Väli on } [90, 110].}}$ 1p (6p)

7. a) Millä muuttujän x arvoilla lauseke $\ln(\sin x)$ on määritelty? Muuttuja x on ilmaistu radiaaneina.
   b) Määritä kaksidesimaaliset likiarvot yhtälön $|\ln(\sin x)| = 2$ kaikille ratkaisuille välillä $0 < x < 10$.

Ratkaisu.

a) Funktio $f(x) = \sin x$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
Funktio $f(x) = \ln x$ on määritelty, kun $x > 0$.
Lauseke $\ln(\sin x)$ on siis määritelty, kun $\sin x > 0$. 1p
Nollakohdat:

$$\sin x = 0$$
$$x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Välillä $x \in [0, 2\pi]$ on $\sin x > 0$, kun $x \in \,]0, \pi[$.
Koska $\sin x$ on jaksollinen funktio (jakson pituus 2π), niin yleisesti pätee

$$\sin x > 0 \iff x \in \,]2\pi n, 2\pi n + \pi[\iff x \in \,]2\pi n, \pi(2n+1)[, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2p (3p)

b)

$$|\ln(\sin x)| = 2, \quad 0 < x < 10$$
$$\ln(\sin x) = 2 \qquad \text{tai} \qquad \ln(\sin x) = -2$$
$$\sin x = e^2 \qquad\qquad \sin x = e^{-2}$$

Koska $e^2 > 1 \geq \sin x$ ja $0 < e^{-2} < 1$, on yhtälö $\sin x = e^{-2}$ näistä kahdesta ainoa, joka on mahdollista ratkaista: 1p (4p)

$$\sin x = e^{-2}$$
$$x = 0{,}1357\ldots + 2\pi n \quad \text{tai} \quad \pi - 0{,}1357\ldots + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Lasketaan likiarvoja n:n eri arvoilla:

n	$0{,}1357\ldots + 2\pi n$	$\pi - 0{,}1357 + 2\pi n$
-1	$-6{,}147\ldots < 0$	$-3{,}277 < 0$
0	$0{,}1357\ldots \approx 0{,}14$	$3{,}0058\ldots \approx 3{,}01$
1	$6{,}4189\ldots \approx 6{,}42$	$9{,}2890\ldots \approx 9{,}29$
2	$12{,}70\ldots > 10$	$15{,}57\ldots > 10$

Likiarvot välillä $0 < x < 10$ ovat $x \approx 0{,}14$, $x \approx 3{,}01$, $x \approx 6{,}42$ ja $x \approx 9{,}29$. 2p (6p)

Vastaus: a) Lauseke $\ln(\sin x)$ on määritelty, kun $x \in]2\pi n, \pi(2n+1)[$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Yhtälön $|\ln(\sin x)| = 2$ kaksidesimaaliset likiarvot välillä $0 < x < 10$ ovat $x \approx 0{,}14$, $x \approx 3{,}01$, $x \approx 6{,}42$ ja $x \approx 9{,}29$.

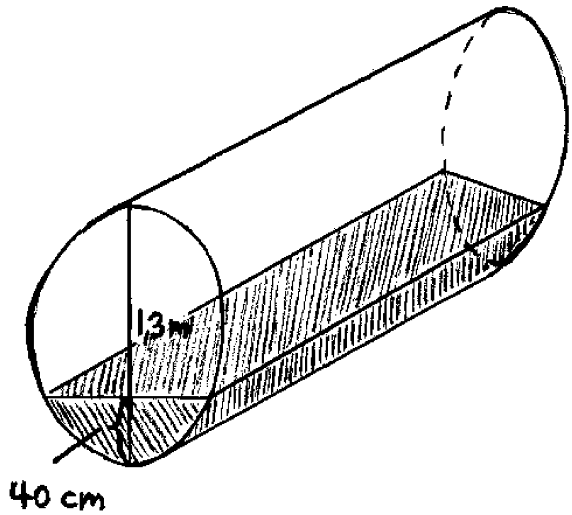
Yksi ratkaisu väärin -1p
Useampi ratkaisu väärin -2p

8. Öljysäiliö on suoran ympyrälieriön muotoinen, ja sen akseli on vaakasuorassa. Akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen halkaisija on 1,3 metriä.

   a) Määritä säiliön pituus, kun sen tilavuus on 3 000 litraa.

   b) Öljyn korkeudeksi syvimmässä kohdassa mitataan 40 senttimetriä. Kuinka monta litraa öljyä on jäljellä säiliössä?

Ratkaisu.



a) Pohjaympyrän säde on

$$r = \frac{1{,}3\,\text{m}}{2} = 0{,}65\,\text{m}.$$

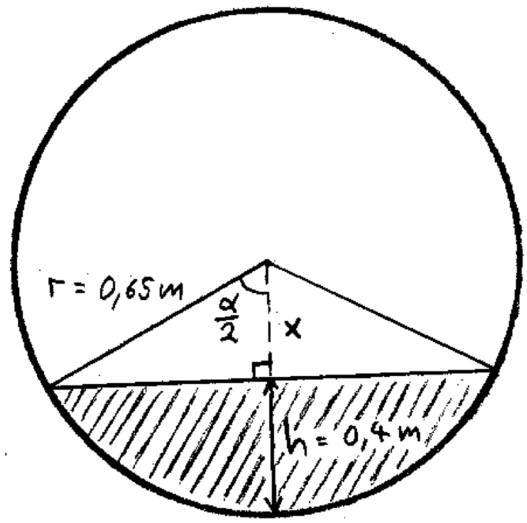
Tilavuus on $V = 3\,000\,\text{l} = 3\,\text{m}^3$. 1p Merkitään säiliön pituutta s:llä ja pohjan pinta-alaa A_p:llä.

$$V = A_\text{p} \cdot s$$

Pohjan pinta-ala $A_\text{p} = \pi r^2$.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 s \quad \| : (\pi r^2) \quad \text{1p (2p)} \\ s &= \frac{V}{\pi r^2} \\ &= \frac{3}{\pi \cdot 0{,}65^2} \\ &= 2{,}26\ldots \\ &\approx 2{,}3\,(\text{m}). \quad \text{1p (3p)} \end{aligned} \tag{1}$$

b)



Lasketaan sen pohjan osan pinta-ala, jonka öljy peittää.
Kuvan suorakulmaisessa kolmiossa

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{x}{r} = \frac{r-h}{r} = \frac{0{,}65-0{,}4}{0{,}65} = \frac{0{,}25}{0{,}65}\\ \frac{\alpha}{2} &= 1{,}1760\ldots \quad \| \cdot 2\\ \alpha &= 2{,}3520\ldots\end{aligned}$$

Ympyräsegmentin pinta-ala saadaan vähentämällä kuvan kolmion pinta-ala sektorin pinta-alasta.

$$\begin{aligned}A &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}\\ &= \frac{\alpha}{2\cancel{\pi}}\cancel{\pi}r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin\alpha \quad \text{2p (5p)}\\ &= \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) \qquad (2)\end{aligned}$$

Jäljellä olevan öljyn tilavuus on

$$V_{\text{öljy}} = A \cdot s$$

Sijoitetaan yhtälöt (1) ja (2).

$$\begin{aligned}
V_{\text{öljy}} &= \frac{\cancel{r^2}}{2}(\alpha - \sin\alpha) \cdot \frac{V}{\pi \cancel{r^2}} \\
&= \frac{V}{2}(\alpha - \sin\alpha) \\
&= \frac{3}{2}(2{,}3520\ldots - \sin(2{,}3520\ldots)) \\
&= 0{,}783\ldots \\
&= 0{,}78\,(\mathrm{m}^3)
\end{aligned}$$

Öljyn tilavuus litroina on siis 780 l. 1p (6p)

Vastaus: a) Säiliön pituus on 2,3 m.

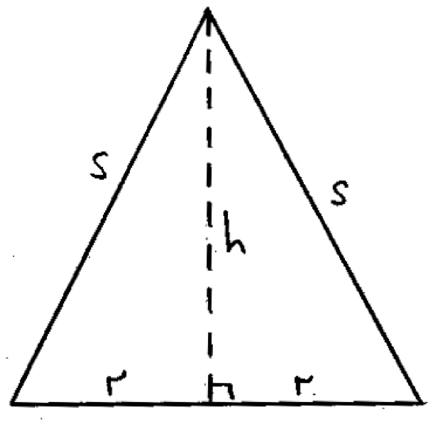
b) Öljyä on jäljellä 780 litraa.

9. Suoran ympyräkartion muotoista telttaa varten on varattu 16 neliömetriä kangasta. Kangasta ei käytetä teltan pohjaan. Määritä pohjaympyrän halkaisija silloin, kun teltan tilavuus on suurin mahdollinen.

Ratkaisu. Merkitään pohjaympyrän sädettä r:llä ja sivujanan pituutta s:llä. Vaipan pinta-ala on siis

$$\begin{aligned} \pi r s &= 16 \quad \| : (\pi r) \\ s &= \frac{16}{\pi r} \quad \text{1p} \qquad (1) \end{aligned}$$

Merkitään teltan korkeutta h:lla.



Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} r^2 + h^2 &= s^2 \\ h^2 &= s^2 - r^2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan (1).

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{16}{\pi r}\right)^2 - r^2 \\ h &= \underset{(-)}{\pm} \sqrt{\frac{16^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2} - r^2} \quad \text{1p (2p)} \qquad (2) \end{aligned}$$

Kartionmuotoisen teltan tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Sijoitetaan yhtälö (2) ja $A = \pi r^2$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{16^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{r^2} - r^2} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\pi^2 r^4 \left(\frac{16^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{r^2} - r^2\right)} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{256r^2 - \pi^2 r^6}. \quad \text{1p (3p)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Tämä lauseke saa suurimman arvonsa silloin, kun juuren sisällä oleva lauseke

$$f(r) = 256r^2 - \pi^2 r^6$$

saa suurimman arvonsa. Selvitetään funktion f suurin arvo derivoimalla.

$$f'(r) = 512r - 6\pi^2 r^5 \quad \text{1p (4p)}$$

Etsitään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
f'(r) &= 0 \\
512r - 6\pi^2 r^5 &= 0 \\
r\left(512 - 6\pi^2 r^4\right) &= 0 \\
r &= 0 \qquad \text{tai} \qquad 512 - 6\pi^2 r^4 = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad 6\pi^2 r^4 = 512 \quad \| : (6\pi^2) \\
&\qquad\qquad\qquad r^4 = \frac{256}{3\pi^2} \\
&\qquad\qquad\qquad r = \underset{(-)}{+} \sqrt[4]{\frac{256}{3\pi^2}}. \quad \text{1p (5p)}
\end{aligned}$$

Teltan pohjan säde on vähintään nolla ja enintään yhtä suuri kuin sivujanan pituus s. Ratkaistaan yläraja yhtälöstä (1).

$$\begin{aligned}
r &= \frac{16}{\pi r} \quad \| \cdot r \\
r^2 &= \frac{16}{\pi} \\
r &= \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{16}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteissä. Etsitään suurin arvo sijoittamalla.

$$f(0) = 256 \cdot 0^2 - \pi^2 \cdot 0^6 = 0$$

$$f\left(\sqrt[4]{\frac{256}{3\pi^2}}\right) = 501{,}83181\ldots \quad \text{(suurin arvo)}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{16}{\pi}}\right) = 0.$$

Näin ollen tilavuuden suurin arvo saadaan, kun halkaisija on

$$d = 2r = 2\sqrt[4]{\frac{256}{3\pi^2}} = 3{,}42953\ldots \approx 3{,}4 \quad (\,\mathrm{m})$$

Vastaus: Teltan pohjaympyrän halkaisija on 3,4 m. 1p (6p)

10. Olkoon $a > 0$. Funktion $f(x) = a\sqrt{x}$ kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[0, 1]$, jolloin syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on 2π. Määritä tämän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala kaavalla $A = 2\pi \int_0^1 |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

Ratkaisu.

$$y = f(x) = a\sqrt{x}, \quad a > 0.$$

Kun kuvaaja $y = y(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[0, 1]$, syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on 2π.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \\
\cancel{\pi}\int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x &= 2\cancel{\pi} \\
\int_0^1 (a\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x &= 2 \\
\int_0^1 a^2 x \,\mathrm{d}x &= 2 \\
a^2 \Big/_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x &= 2 \\
a^2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) &= 2 \quad \text{1p} \\
\frac{a^2}{2} &= 2 \quad \| \cdot 2 \\
a^2 &= 4 \\
a &= \underset{(-)}{+} 2. \quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}$$

Derivoidaan funktio f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad \text{1p (3p)}
\end{aligned}$$

Vaipan pinta-ala on

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_0^1 |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^1 |2\sqrt{x}|\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\sqrt{x} \geq 0$, joten $|2\sqrt{x}| = 2\sqrt{x}$.

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x \quad \text{1p (4p)} \\
&= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \mathop{\Big/}_{1}^{0} \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{8\pi}{3} \mathop{\Big/}_{0}^{1} (x+1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{1p (5p)} \\
&= \frac{8\pi}{3}\left((1+1)^{\frac{3}{2}} - (0+1)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).
\end{aligned}
$$

Vastaus: Pyörähdyskappaleen pinta-ala on $\frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. 1p (6p)

11. Osoita, että 7-järjestelmässä ilmaistu luku $a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$ on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun numeroiden summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on jaollinen luvulla 6. Tässä $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Ratkaisu.

Väite. *Luku*

$$a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$$

on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun numeroiden summa

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1,$$

missä $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *on jaollinen luvulla 6.*

$\boxed{\text{Tapa 1}}$

Todistus. $7 \equiv 1 \pmod 6$, joten kongruenssin tulosäännön nojalla

$$7^n \equiv 1 \pmod 6 \quad \text{2p}$$

. Tästä seuraa kongruenssin tulo- ja summasääntöjen nojalla, että

$$\begin{aligned} &a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0 \\ &\quad \equiv a_5 1^5 + a_4 1^4 + a_3 1^3 + a_2 1^2 + a_1 + a_0 \pmod 6 \quad \text{3p (5p)} \\ &\quad \equiv a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 6 \end{aligned}$$

Näin ollen luku

$$a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$$

on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun luku

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

on, koska luvut ovat kongruentit modulo 6. □

1p (6p)

TAPA 2

Todistus. Kaikilla n pätee

$$7^n = (6+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^k = \binom{n}{0} 6^0 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^{k-1} = 1 + 6m_n,$$

1p

missä $m_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^{k-1}$ on kokonaisluku. Nyt

$$\begin{aligned} &a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0 \\ &\quad = a_5(1+6m_5) + a_4(1+6m_4) + a_3(1+6m_3) + a_2(1+6m_2) + a_1(1+6m_1) + a_0 \\ &\quad = (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + 6(a_5 m_5 + a_4 m_4 + a_3 m_3 + a_2 m_2 + a_1 m_1) \\ &\quad = (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + 6m, \end{aligned}$$

missä $m = a_5 m_5 + a_4 m_4 + a_3 m_3 + a_2 m_2 + a_1 m_1$ on kokonaisluku. 2p (3p)
Jos $a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$ on jaollinen luvulla 6, niin jollain $p \in \mathbb{Z}$ on

$$\begin{aligned} a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0 &= 6p \\ (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + 6m &= 6p \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 6(p-m), \end{aligned}$$

missä $p - m$ on kokonaisluku, joten $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on jaollinen luvulla 6. 1p (4p)
Jos $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on jaollinen luvulla 6, niin jollain $q \in \mathbb{Z}$ pätee $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 6q$. Tällöin

$$\begin{aligned} a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0 &= (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + 6m \\ &= 6q + 6m \\ &= 6(q+m), \end{aligned}$$ 1p (5p)

missä $q + m$ on kokonaisluku, joten $a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$ on jaollinen luvulla 6. $\square$

1p (6p)

12. Italialainen Fibonacci laski vuonna 1225 yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ juurelle likiarvon $x \approx 1{,}368808108$.

a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri reaalilukujen joukossa.
b) Kuinka mones Newtonin menetelmän iterointikierros tuottaa ensimmäisen kerran samat yhdeksän desimaalia kuin Fibonaccin likiarvossa, kun alkuarvona on $x_0 = 1$?

Ratkaisu.

a) Merkitään $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.
Tutkitaan derivaattaa:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 \quad \text{1p}$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 4x + 10 &= 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3} \end{aligned}$$

Koska $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -104 < 0$, derivaatalla ei ole nollakohtia. Funktio f on siten aidosti monotoninen, joten sillä on enintään yksi nollakohta. 1p (2p)
Koska f on paritonasteinen polynomi, sillä on vähintään yksi nollakohta.
Siten yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri. □ 1p (3p)

b) Iteroidaan $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 1p (4p)

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &\approx 1{,}411176470 \\ x_2 &\approx 1{,}36933647 \\ x_3 &\approx 1{,}368808189 \\ x_4 &\approx 1{,}368808108 \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

Nähdään, että samat desimaalit saadaan ensimmäisen kerran neljännellä iterointikierroksella. 1p (6p)

13. a) Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

on derivoituva kohdassa $x = 0$.

b) Olkoon $g(x) = f'(x)$, kun $x \in \mathbb{R}$. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, ettei funktio $g(x)$ ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu.

a) Tutkitaan erotusosamäärä

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{1p}{=} \frac{\frac{x}{1+|x|} - \frac{0}{1+|0|}}{x-0} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \frac{1}{1+|x|} \quad \text{1p (2p)}$$

Siis

$$\lim_{x->0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x->0} \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Koska erotusosamäärän raja-arvo on olemassa, f on derivoituva kohdassa 0. $\square$

1p (3p)

b) Kun $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ eli

$$g(x) = f'(x) = \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Kun $x < 0$, on $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ eli

$$g(x) = f'(x) = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}. \quad \text{1p (4p)}$$

Kun $x = 0$, on $g(0) = f'(0) = 1$.
Siis, kun $x > 0$, g:n erotusosamäärälle saadaan

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{x} = \frac{1-(1+x)^2}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{1-1-2x-x^2}{x(1+x)^2} = \frac{-2x-x}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{-2-x}{(1+x)^2} \to -2, \quad \text{kun } x \to 0^+ \quad \text{1p (5p)}\end{aligned}$$

ja, kun $x < 0$, on

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \frac{\frac{1}{(1-x)^2}-1}{x} = \frac{1-(1-x)^2}{x(1-x)^2} \\ &= \frac{1-1+2x-x^2}{x(1-x)^2} = \frac{2x-x}{x(1-x)^2} \\ &= \frac{2-x}{(1-x)^2} \to 2, \quad \text{kun } x \to 0^-\end{aligned}$$

Toispuoleiset raja-arvot ovat siis erisuuret, joten g ei ole derivoituva origossa.

1p (6p)

*14. Koirien kaksipäiväiseen HeinäHaukku-tapahtumaan ilmoittaudutaan joko lauantainäyttelyyn, sunnuntainäyttelyyn tai molempiin. Eräänä vuonna HeinäHaukkuun ilmoitettiin 1 372 koiraa, joista 31 ilmoitettiin vain lauantainäyttelyyn ja 43 vain sunnuntainäyttelyyn. Olkoon L tapahtuma "HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin lauantainäyttelyyn" ja S tapahtuma "HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin sunnuntainäyttelyyn".

a) Laske todennäköisyys $P(L \text{ ja } S)$ kyseisenä vuonna. (3 p.)
b) Miten todennäköisyyslaskennassa määritellään kahden tapahtuman riippumattomuus? (2 p.)
c) Ovatko L ja S riippumattomia kyseisenä vuonna? (2 p.)
d) Olkoot yleisesti a vain lauantaille ilmoitettujen koirien lukumäärä, b kummallekin päivälle ilmoitettujen lukumäärä ja c vain sunnuntaille ilmoitettujen lukumäärä. Millä lukuja a, b ja c koskevalla ehdolla tapahtumat L ja S ovat riippumattomia? (2 p.)

Ratkaisu.

a) Molempiin päiviin ilmoitettuja koiria on $1372 - 31 - 42 = 1298$ kappaletta, 1p eli

$$P(L \text{ ja } S) = \frac{1298}{1372} = \frac{649}{686} = 0{,}9460\ldots \approx \underline{\underline{94{,}6\%}}.$$ 2p (3p)

b) Tapahtumat A ja B ovat riippumattomat, jos

$$P(A) = 0 \quad \text{tai} \quad P(B|A) = P(B).$$ 2p (5p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä koevastauksessa: Joissain lähteissä tapahtumien A ja B riippumattomuus määritellään ehdolla

$$P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B),$$

mikä käy myös tehtävään vastaukseksi. Niissä lähteissä, joissa käytetään ensimmäisenä esitettyä määritelmää, usein johdetaan kaava $P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B)$ seurauksena tapahtumien riippumattomuuden määritelmästä.

c) Lauantain näyttelyyn osallistuu $1372 - 43 = 1329$ koiraa. Huomataan heti, että $P(L) \neq 0$. Koska $P(L \text{ ja } S) = P(L)P(S|L)$, niin

$$\begin{aligned} P(S|L) &= \frac{P(L \text{ ja } S)}{P(L)} \\ &= \frac{1298/1372}{1329/1372} = \frac{1298}{1329}. \end{aligned}$$ 1p (6p)

Sunnuntain näyttelyyn osallistuu $1372 - 31 = 1341$ koiraa

$$P(S) = \frac{1341}{1372} \neq \frac{1298}{1329} = P(S|L).$$

<u>L ja S eivät ole riippumattomat.</u> 1p (7p)

d) Voidaan olettaa, että $a + b + c > 0$.

$$P(L) = \frac{a+b}{a+b+c} \qquad P(S) = \frac{b+c}{a+b+c} \qquad P(L \text{ ja } S) = \frac{b}{a+b+c}.$$

Jos $a + b = 0$ eli $a = 0$ ja $b = 0$, L ja S ovat riippumattomat. Muuten

$$P(S|L) = \frac{P(L \text{ ja } S)}{P(L)} = \frac{\frac{b}{a+b+c}}{\frac{a+b}{a+b+c}} = \frac{b}{a+b}.$$ 1p (8p)

Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} P(S|L) &= P(S) \\ \frac{b}{a+b} &= \frac{b+c}{a+b+c} \qquad \| \text{ kerrotaan ristiin} \\ \cancel{ab} + \cancel{b^2} + \cancel{bc} &= \cancel{ab} + ac + \cancel{b^2} + \cancel{bc} \\ ac &= 0 \\ a &= 0 \quad \text{tai} \quad c = 0. \end{aligned}$$

<u>Tapahtumat ovat riippumattomat täsmälleen silloin, kun $a = 0$ tai $c = 0$.</u> 1p (9p)

*15. Tarkastellaan summaa $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

a) Laske summat, kun $n = 1, 2, \ldots, 5$, ja muodosta niiden perusteella arvaus summan arvolle ylärajan n funktiona.

b) Määritä sellaiset kertoimet $A \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathbb{R}$, että kaava

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

on voimassa kaikilla $k \geq 1$. (2 p.)

c) Todista a-kohdassa arvaamasi lauseke oikeaksi käyttämällä b-kohdan kaavaa. (4 p.)

d) Määritä raja-arvo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. (1 p.)

Ratkaisu.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

a) Laskimeen sijoittamalla saadaan

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad S_2 = \frac{2}{3}$$
$$S_3 = \frac{3}{4} \qquad S_4 = \frac{4}{5}$$
$$S_5 = \frac{5}{6} \quad \text{1p} \qquad .$$

Laskettujen arvojen perusteella arvataan, että summan arvo ylärajan n funktiona on

$$\underline{\underline{S_n = \frac{n}{n+1}}}. \quad \text{1p (2p)}$$

b)

$\boxed{\textsc{Tapa 1}}$

Huomataan, että kaikilla $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
&{}^{k+1)}\frac{1}{k} + {}^{k)}\frac{-1}{k+1} \\
&= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \\
&= \frac{k+1-k}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{k(k+1)}. \qquad \text{1p (3p)}
\end{aligned}
$$

Täten kertoimilla $\underline{\underline{A = 1 \text{ ja } B = -1}}$ kaava

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

on voimassa kaikilla $k \geq 1$. 1p (4p)

$\boxed{\textsc{Tapa 2}}$

Olkoon $k \geq 1$ ja olkoot A ja B nollasta poikkeavia lukuja. Nyt

$$
\begin{aligned}
&{}^{k+1)}\frac{A}{k} + {}^{k)}\frac{B}{k+1} \\
&= \frac{A(k+1)}{k(k+1)} + \frac{Bk}{k(k+1)} \\
&= \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} \\
&= \frac{Ak+Bk+A}{k(k+1)} \\
&= \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}. \qquad \text{1p (3p)}
\end{aligned}
$$

Nyt jotta tehtävänannon yhtälö

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k(k+1)}$$

olisi tosi, täytyy kaikilla $k \geq 1$ päteä,

$$1 = (A + B)k + A,$$

joka on mahdollista vain, kun $\underline{\underline{A = 1}}$ ja $A + B = 0$, eli $\underline{\underline{B = -1}}$. 1p (4p)

c)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

b-kohdan nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \quad \text{1p (5p)} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{1p (6p)} \\
&= 1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)}_{=0} + \ldots + \underbrace{\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)}_{=0} - \frac{1}{n+1} \\
&= {}^{n+1)}1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{1p (7p)} \\
&= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+1-1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1},
\end{aligned}$$

joten b-kohdan kaava on todistettu. □

d) 1p (8p)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Sijoitetaan c-kohdassa summalle todistettu lauseke

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}^{(n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{1+0} \\
&= \underline{\underline{1}}. \quad \text{1p (9p)}
\end{aligned}$$