DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta
- Arkiaamuisin **31.3.-23.5.2014** (92 oppituntia tai laaja kurssi 136 oppituntia)

Lääkiskurssi

- 5 täysimittaista harjoituspääsykoetta. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- **27.3.-23.5.2014** (153 oppituntia)

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Pitkä matematiikka, kevät 2014

Mallivastaukset, 19.3.2014

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Ratkaise yhtälö $7(x-3)+1 = x^2 - 1 - (x^2 - 1)$.
   b) Millä muuttujan x arvoilla lauseke $x(5-8x)$ saa positiivisia arvoja?
   c) Sievennä lauseke $\dfrac{a^2-b^2}{a-b} + \dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, kun $a \neq b$ ja $a \neq -b$.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} 7(x-3)+1 &= x^2 - 1 - (x^2 - 1) \\ 7x - 21 + 1 &= x^2 - 1 - x^2 + 1 \\ 7x - 20 &= 0 \quad \text{1p} \\ 7x &= 20 \quad \| : 7 \\ x &= \frac{20}{7} \quad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

Huom! Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

b) Lauseke saa positiivisia arvoja, kun

$$x(5-8x) > 0$$

Ratkaistaan lausekkeen $x(5-8x)$ nollakohdat.

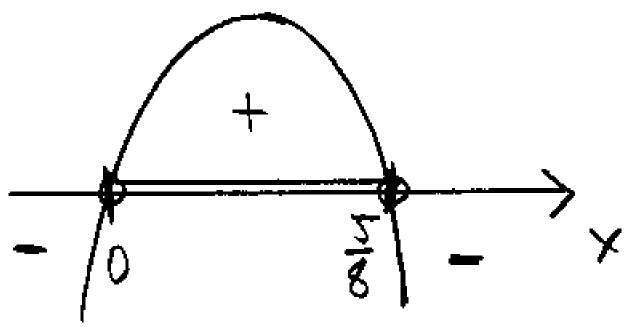
$$x(5-8x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 5 - 8x = 0$$

$$-8x = -5 \quad \| : (-8)$$

$$x = \frac{5}{8} \quad \text{1p (3p)}$$

Lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



Vastaus: $\underline{\underline{\text{Lauseke saa positiivisia arvoja, kun } 0 < x < \tfrac{5}{8}.}}$ 1p (4p)

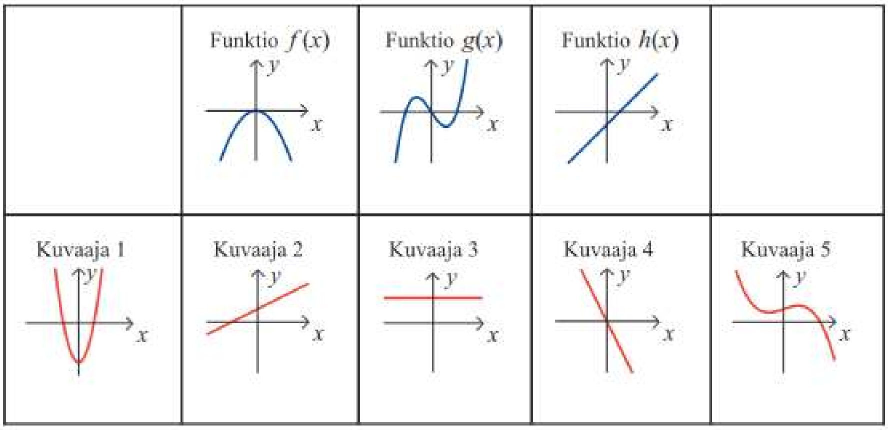
Huom! Epäyhtälön voi ratkaista myös laskimella.

c) $a \neq b$, $a \neq -b$.

$$
\begin{aligned}
&{}^{a+b)}\frac{a^2-b^2}{a-b} + {}^{a-b)}\frac{a^2-b^2}{a+b} \\
&= \frac{(a+b)\cancel{(a^2-b^2)}}{\cancel{a^2-b^2}} + \frac{(a-b)\cancel{(a^2-b^2)}}{\cancel{a^2-b^2}} \quad \text{1p (5p)} \\
&= a+b+(a-b) \\
&= \underline{\underline{2a}} \quad \text{1p (6p)}
\end{aligned}
$$

Huom! Lausekkeen voi sieventää myös laskimella.

2. Taulukon ylärivissä ovat funktioiden $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ kuvaajat. Alemmassa rivissä on viiden eri funktion kuvaajat. Näiden joukossa on myös derivaattafunktioiden $f'(x)$, $g'(x)$ ja $h'(x)$ kuvaajat.



Kopioi alla oleva taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaajista 1-5 esittää kyseessä olevan funktion derivaattaa. Vastausta ei tarvitse perustella.

Funktio	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
Derivaatan kuvaajan numero			

Ratkaisu.

Funktio	f(x)	g(x)	h(x)
Derivaatan kuvaajan numero	4	1	3
	2p	2p	2p

3. a) Käyrät $y = 6x^2 + 3x^4 + \frac{1}{x}$ ja $y = 3x^4$ sekä suorat $x = 1$ ja $x = 2$ rajaavat tasoalueen. Laske sen pinta-alan likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.
   b) Määritellään funktiot $f(x) = x^3 - 3x$ ja $g(x) = \frac{1}{2}f(2x)$, kun $x \in \mathbb{R}$. Laske derivaatta $g'(1)$.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} y_1 &= 6x^2 + 3x^4 + \frac{1}{x}, \\ y_2 &= 3x^4 \end{aligned}$$

Lasketaan käyrien leikkauskohdat.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ 6x^2 + 3x^4 + \frac{1}{x} &= 3x^4, \quad x \neq 0 \\ 6x^2 + \frac{1}{x} &= 0 \quad \| \cdot x \\ 6x^3 + 1 &= 0 \\ 6x^3 &= -1 \quad \| : 6 \\ x^3 &= -\frac{1}{6} \\ x &= \sqrt[3]{-\frac{1}{6}} \\ x &= -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}. \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, joka ei kuulu välille $[1, 2]$, joten käyrät y_1 ja y_2 eivät siis leikkaa tarkasteltavalla alueella. Koska käyrät eivät leikkaa, kysytyn alueen pinta-ala saadaan integraalista

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_1^2 6x^2 + 3x^4 + \frac{1}{x} - 3x^4 \,\mathrm{d}x \right| \quad \text{1p} \\
&= \left| \int_1^2 6x^2 + \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \Big/_{\!1}^{2} 2x^3 + \ln|x| \right| \quad \text{1p (2p)} \\
&= \left| 2 \cdot 2^3 + \ln(2) - (2 \cdot 1^3 - \ln(1)) \right| \\
&= |16 - 2 + \ln(2) + 0| \\
&= |14 + \ln(2)| \\
&= 14{,}693\ldots \\
&\approx 14{,}69
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Pinta-ala on 14,69.}}}$ 1p (3p)

Huom! Integraalin voi laskea myös laskimella.

b) $f(x) = x^3 - 3x$ ja $g(x) = \frac{1}{2} f(2x)$.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2}\Big((2x)^3 - 3 \cdot (2x)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(8x^3 - 6x\Big) \\
&= 4x^3 - 3x \quad \text{1p (4p)} \\
g'(x) &= 12x^2 - 3 \quad \text{1p (5p)} \\
g'(1) &= 12 \cdot 1^2 - 3 \\
&= \underline{\underline{9}} \quad \text{1p (6p)}
\end{aligned}
$$

4. Millä vakion a arvolla yhtälöllä $ax^2 - 5x + 2 = 0$ on täsmälleen yksi juuri?

Ratkaisu.

Kun $a = 0$, yhtälö on

$$-5x + 2 = 0,$$

jolla on täsmälleen yksi juuri. Jos $a \neq 0$, yhtälö

2p

$$ax^2 - 5x + 2 = 0$$

on toista astetta, joten sillä on täsmälleen yksi juuri, kun sen diskriminantti $D = 0$.

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = -8a + 25.$$

Siis on oltava

$$-8a + 25 = 0 \quad \text{2p (4p)}$$
$$-8a = -25 \quad \| : (-8)$$
$$a = \frac{25}{8}$$

Vastaus: $\underline{\underline{a = 0 \text{ tai } a = \frac{25}{8}}}$. 2p (6p)

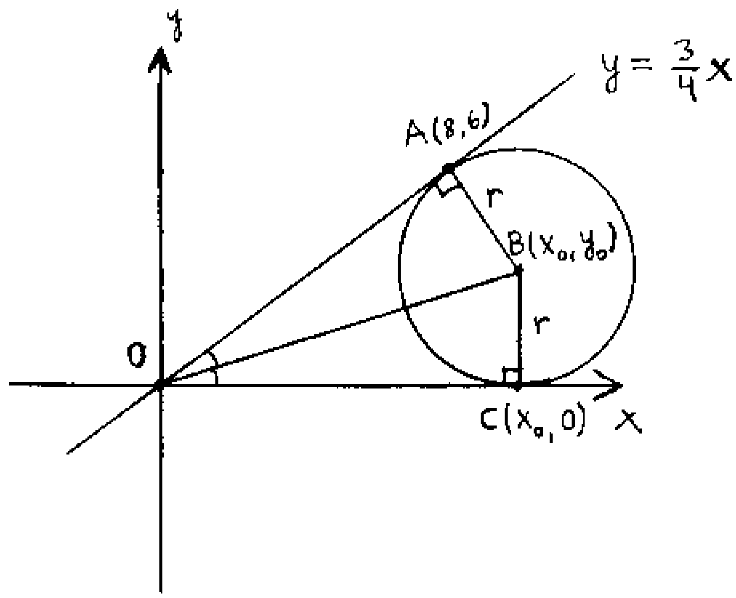
5. Ympyrä sivuaa suoraa $3x - 4y = 0$ pisteessä $(8, 6)$. Lisäksi se sivuaa positiivista x-akselia. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

Ratkaisu.

Merkitään ympyrän keskipistettä $B(x_0, y_0)$:lla. Suora on

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \\ y &= \frac{3}{4}x. \end{aligned}$$

Hahmotellaan tehtävänannon mukainen tilanne.



Kolmiot OBC ja OAB ovat suorakulmaisia ja niillä on sama hypotenuusa OB sekä yhtä pitkät kateetit AB ja BC, joten kolmiot OBC ja OAB ovat yhtenevät. 2p Siten myös

$$\begin{aligned} |OA| &= |OC| \\ \sqrt{(8-0)^2 + (6-0)^2} &= \sqrt{(x_0 - 0)^2 + 0^2} \\ 10 &= |x_0| \\ x_0 &= \underset{(-)}{+} 10 \quad \text{1p (3p)} \end{aligned}$$

Toisaalta on siis

$$\begin{aligned}
|AB| &= |BC| \\
\sqrt{(x_0-8)^2+(y_0-6)^2} &= |y_0| \quad \|(\quad)^2 \\
(x_0-8)^2+\cancel{y_0^2}-12y_0+36 &= \cancel{y_0^2} \\
12y_0 &= (x_0-8)^2+36 \quad \| :12 \\
y_0 &= \frac{(x_0-8)^2}{12}+3 \ \text{1p (4p)}
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_0 = 10$, saadaan:

$$y_0 = \frac{(10-8)^2}{12}+3 = \frac{10}{3} \quad (=r) \quad \text{1p (5p)}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Keskipiste } \left(10, \frac{10}{3}\right)\text{, säde on } \frac{10}{3}.}}$ 1p (6p)

6. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Millä muuttujan x arvolla summa $(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ on mahdollisimman pieni?

Ratkaisu.

Muodostetaan summan lauseke.

$$\begin{aligned} S(x) &= (x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 \\ &= (x^2 - 2xa_1 + a_1^2) + \ldots + (x^2 - 2xa_n + a_n^2) \\ &= \underbrace{x^2 + \ldots + x^2}_{n \text{ kpl}} - 2x(a_1 + \ldots + a_n) + \underbrace{a_1^2 + \ldots + a_n^2}_{\text{merkitään } B} \\ &= nx^2 - 2x(a_1 + \ldots + a_n) + B, \quad B \text{ on vakio} \end{aligned}$$ 1p

$y = S(x)$ on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka pienin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta.

$$S'(x) = 2nx - 2(a_1 + \ldots + a_n)$$ 2p (3p)

Etsitään derivaatan nollakohta

$$\begin{aligned} S'(x) &= 0 \\ 2nx - 2(a_1 + \ldots + a_n) &= 0 \\ 2nx &= 2(a_1 + \ldots + a_n) \quad \| : (2n) \\ x &= \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \end{aligned}$$ 2p (5p)

eli lukujen $a_1, \ldots, a_n$ keskiarvo.

Vastaus: Summa on mahdollisimman pieni, kun x on lukujen $a_1, \ldots, a_n$ keskiarvo.

1p (6p)

7. Säännöllisen tetraedrin muotoista noppaa heittämällä voi saada silmäluvuksi 1, 2, 3 tai 4. Nämä ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Pelaaja heittää yhtä aikaa tetraedrin muotoista ja tavallista noppaa ja laskee silmälukujen summan.

   a) Määritä kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet.
   b) Määritä silmälukujen summan odotusarvo.

Ratkaisu.

Taulukoidaan kaikki silmälukujen yhdistelmät.

	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9
noppa 2.	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5
		1	2	3	4

noppa 1.

2p

a) Taulukosta nähdään, kuinka monessa alkeistapauksessa mikäkin silmälukujen summa saavutetaan. Esim. summa 6 saadaan neljässä alkeistapauksessa. Kaikkien alkeistapausten määrä on $n_E = 4 \cdot 6 = 24$. Lasketaan todennäköisyydet, että silmälukujen summa on $2, 3, 4, 5, \ldots$ jne.

$$
\begin{aligned}
P(2) &= \frac{1}{24} \\
P(3) &= \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \\
P(4) &= \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \\
P(5) &= \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\
P(6) &= \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\
P(7) &= \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\
P(8) &= \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \\
P(9) &= \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \\
P(10) &= \frac{1}{24} \qquad \text{1p (3p)}
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(x) &= p_1X_1 + p_2X_2 + \ldots \\
&= \frac{1}{24}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 \\
&+ \frac{1}{6}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 7 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{1}{12}\cdot 9 + \frac{1}{24}\cdot 10 \quad \text{2p (5p)} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Vastaus: Silmälukujen summan odotusarvo on 6. 1p (6p)

8. Lasersäteellä osoitetaan pisteestä $A(1,-2,3)$ vektorin $\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$ suuntaan. Toisella säteellä osoitetaan pisteestä $B(9,-1,-12)$ vektorin $\overline{v} = -\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaan. Näytä, että säteet leikkaavat toisensa, ja määritä niiden leikkauspiste.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} &A(1,-2,3) \\ &B(9,-1,-12) \\ \overline{u} &= 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k} \\ \overline{v} &= -\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} \end{aligned}$$

Muodostetaan lasersäteiden kautta kulkevien suorien parametriesitykset.

Suora 1:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + s\overline{u} \\ &= \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + s(2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}) \\ &= (2s+1)\overline{i} + (-s-2)\overline{j} + (-3s+3)\overline{k} \end{aligned}$$

Parametriesitys on $\begin{cases} x_1 = 2s+1 \\ y_1 = -s-2 \\ z_1 = -3s+3 \end{cases}$

Suora 2:

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \overline{OB} + t\overline{v} \\ &= 9\overline{i} - \overline{j} - 12\overline{k} + t(-\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= (-t+9)\overline{i} + (-2t-1)\overline{j} + (3t-12)\overline{k} \end{aligned}$$

Parametriesitys on $\begin{cases} x_2 = -t+9 \\ y_2 = -2t-1 \\ z_2 = 3t-12 \quad \text{1p} \end{cases}$

Leikkauspisteen täytyy toteuttaa molempien suorien parametriesitykset joillain s:n ja t:n arvoilla. Ratkaistaan s ja t parametriesitysten muodostamasta yhtälöryhmästä.

$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \quad \text{1p (2p)} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2s+1 &= \text{-t + 9} \\ -s-2 &= \text{-2t - 1} \\ -3s+3 &= \text{3t - 12} \quad \text{1p (3p)} \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Yhtälöt (1) ja (2):

$$\begin{cases} 2s+1 &= -t+9 \quad \| \cdot (-2) \\ -s-2 &= -2t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4s-2 &= 2t-18 \\ -s-2 &= -2t-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -5s-4 &= -19 \\ -5s &= -15 \quad \| : (-5) \\ s &= 3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = 3$ yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} -3-2 &= -2t-1 \\ 2t &= -1+5 \quad \| : 2 \\ t &= 2 \quad \text{1p (4p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = 3$ ja $t = 2$ yhtälön (3) molemmille puolille.

$$\begin{aligned} -3s+3 &= -3 \cdot 3 + 3 = -6 \\ 3t-12 &= 3 \cdot 2 - 12 = -6, \end{aligned}$$

eli $s = 3$ ja $t = 2$ toteuttavat yhtälön (3). Yhtälöryhmällä on ratkaisu, joten suorilla on leikkauspiste. | Lasketaan leikkauspiste sijoittamalla $s = 3$ suoran 1. parametriesitykseen. 1p (5p)

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ y_1 = -3 - 2 = -5 \\ z_1 = -3 \cdot 3 + 3 = -6 \end{cases}$$

Vastaus: Säteiden leikkauspiste on $(7, -5, -6)$. 1p (6p)
Huom! Parametriesityksistä muodostetun yhtälöryhmän voi ratkaista myös laskimella.

9. Taso $x + 2y + 3z = 6$ leikkaa positiiviset koordinaattiakselit pisteissä A, B ja C.
   a) Määritä sen tetraedrin tilavuus, jonka kärjet ovat origossa O sekä pisteissä A, B ja C.
   b) Määritä kolmion ABC pinta-ala.

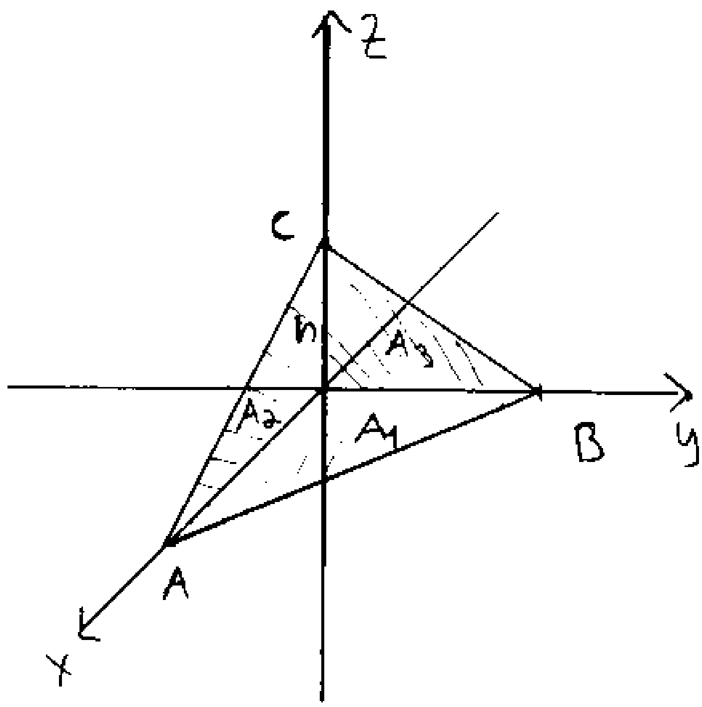
Ratkaisu.

a) Lasketaan tason $x + 2y + 3z = 6$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

x-akseli: $y = 0$ ja $z = 0$. Tällöin $x = 6$, eli leikkauspiste on $A(6, 0, 0)$.

y-akseli: $x = 0$ ja $z = 0$. Tällöin $2y = 6 \quad\Rightarrow\quad y = 3$, eli leikkauspiste on $B(0, 3, 0)$.

z-akseli: $x = 0$ ja $y = 0$. Tällöin $3z = 6 \quad\Rightarrow\quad z = 2$, eli leikkauspiste on $C(0, 0, 2)$. 1p



Valitaan tetraedrin pohjaksi kolmio OAB. Sen pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

ja korkeus on

$$h = |OC| = 2. \quad \text{1p (2p)}$$

Tetraedrin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 = 6.$$

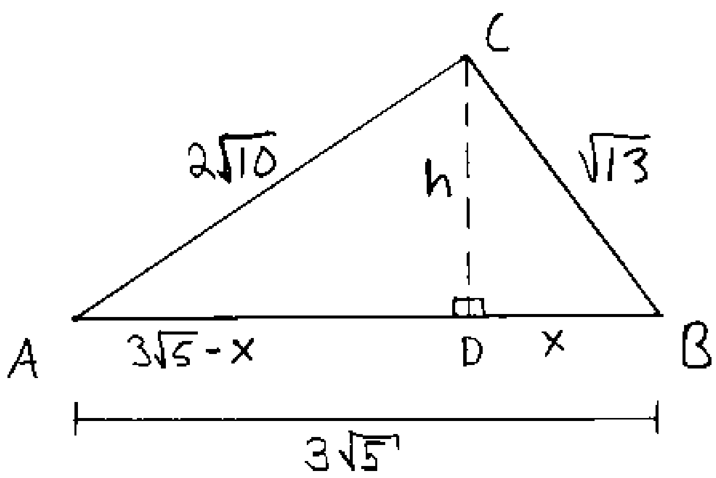
Vastaus: Tilavuus on 6. 1p (3p)

b)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Lasketaan kolmion ABC sivujen pituudet:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \\ |AC| &= \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \\ |BC| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad \text{1p (4p)} \end{aligned}$$



Kolmiot ADC ja BDC ovat suorakulmaisia. Tällöin

$$\begin{cases} (\sqrt{13})^2 &= h^2 + x^2 \\ (2\sqrt{10})^2 &= h^2 + (3\sqrt{5} - x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13 = h^2 + x^2 & (1) \\ 40 = h^2 + 45 - 6\sqrt{5}x + x^2 & (2) \end{cases}$$

Yhtälöstä (1):

$$h^2 = 13 - x^2 \tag{3}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} 40 &= 13 - \cancel{x^2} + 45 - 6\sqrt{5}x + \cancel{x^2} \\ 6\sqrt{5}x &= 18 \quad \| : (6\sqrt{5}) \\ x &= \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad (4) \end{aligned}$$

Sijoitetaan (4) yhtälöön (3).

$$\begin{aligned} h^2 &= 13 - \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ h &= \pm\sqrt{13 - \frac{9}{5}} \\ h &= \frac{2\sqrt{70}}{5} \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{70}}{5} = 3\sqrt{14}.$$

Vastaus: Pinta-ala on $3\sqrt{14}$. 1p (6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Lasketaan kolmion ABC sivujen pituudet:

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5} = a\\ |AC| &= \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10} = b\\ |BC| &= \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = c \quad \text{1p (4p)}\end{aligned}$$

Merkitään $\gamma = \sphericalangle A$. Nyt kosinilauseella

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)\\ \cos(\gamma) &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ \cos(\gamma) &= \frac{(3\sqrt{5})^2+(2\sqrt{10})^2-\sqrt{13}^2}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}}\\ \cos(\gamma) &= \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad \text{1p (5p)}\end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

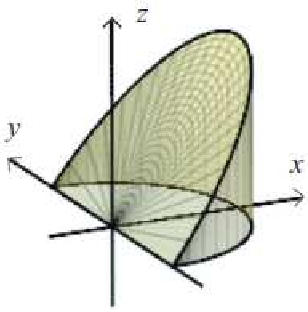
$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}ab\sin\gamma\\ &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2(\gamma)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2}\\ &= 3\sqrt{14}\end{aligned}$$

Vastaus: Pinta-ala on $3\sqrt{14}$. 1p (6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Nopeimmin tehtävän voi ratkaista Heronin kaavalla, joka löytyy MAOL:sta.

10. Juustoa myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa. Lieriön korkeus on h ja sen pohjan säde on r. Juusto leikataan ensin pystysuorassa suunnassa kahteen yhtä suureen osaan. Toisesta puolikkaasta leikataan vinosti kuvion osoittama pienempi pala, jonka korkeus on h. Laske tämän juustopalan tilavuus integroimalla.



<http://www.valio.fi/tuotteet/juustot/valio-oltermanni>. Luettu 12.3.2013.

Ratkaisu.

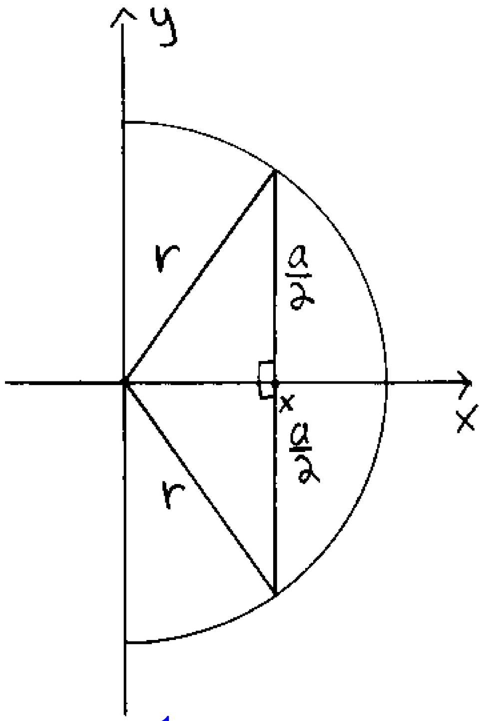
$\boxed{\text{RATKAISUVAIHTOEHTO 1}}$

Kysytty tilavuus voidaan laskea määrätystä integraalista

$$V = \int_0^r A(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \int_0^r a(x)h(x)\,\mathrm{d}x$$

Selvitetään $a(x)$:n ja $h(x)$:n lausekkeet.



1p

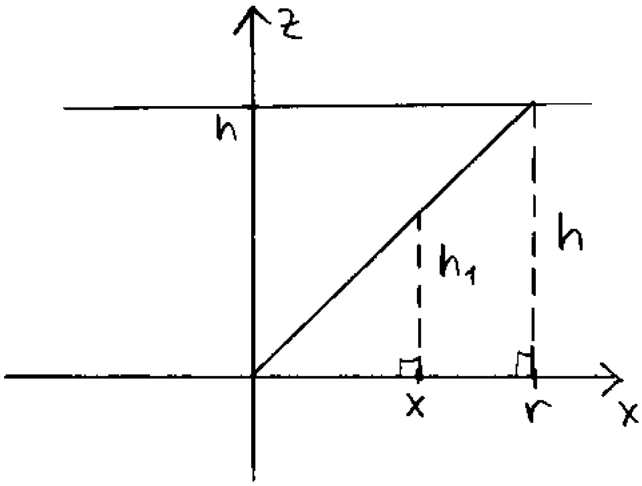
Pythagoraan lause:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \| \cdot 2$$

$$a = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$a(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}.$$ 1p (2p)



Yhdenmuotoisuus:

$$\frac{h_1}{x} = \frac{h}{r} \quad \| \cdot x$$
$$h_1 = \frac{h}{r}x$$
$$h(x) = \frac{h}{r}x \quad \text{1p (3p)}$$

Integraali saadaan muotoon

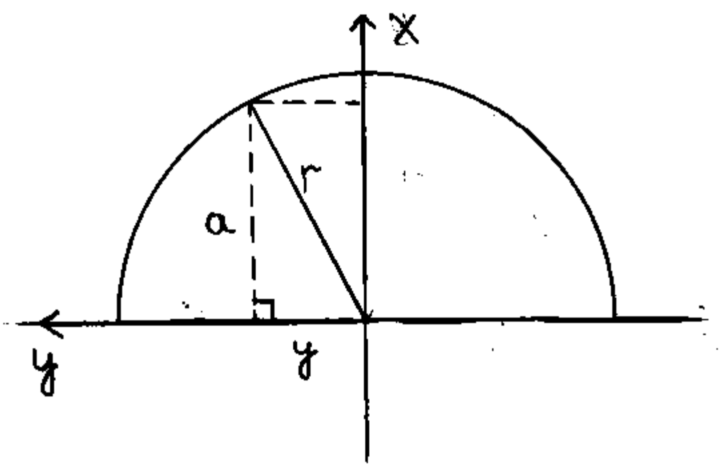
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^r 2\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{h}{r}x\,\mathrm{d}x \quad \text{1p (4p)}\\
&= -\frac{h}{r}\int_0^r -2x\cdot(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{1p (5p)}\\
&= -\frac{h}{r}\bigg/_0^r \frac{2}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\\
&= -\frac{h}{r}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[(r^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-(r^2-0)^{\frac{3}{2}}\right]\\
&= -\frac{h}{r}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-r^3)\\
&= \frac{2}{3}hr^2
\end{aligned}
$$

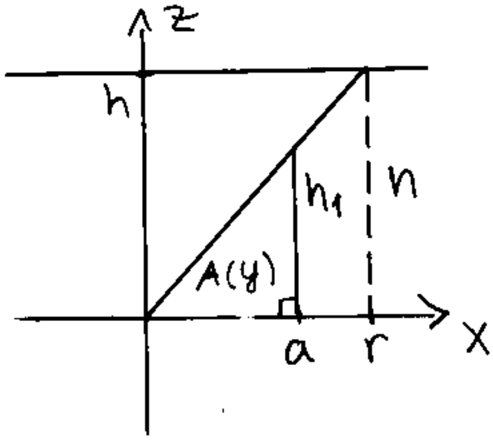
Vastaus: Tilavuus on $\frac{2}{3}hr^2$. 1p (6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kysytty tilavuus voidaan laskea määrätystä integraalista.

$$V = \int_{-r}^{r} A(y)\,\mathrm{d}y$$





Integroitavat pinnat ovat suorakulmaisia kolmioita, joten

$$A = \frac{1}{2}ah. \quad \text{1p}$$

Kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{a} &= \frac{h}{r} \quad \| \cdot a \\ h_1 &= \frac{h}{r}a \quad \text{1p (2p)} \end{aligned} \tag{1}$$

Pythagoraan lauseesta saadaan

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + y^2 \\ a^2 &= r^2 - y^2 \quad \text{1p (3p)} \end{aligned} \tag{2}$$

Pinta-ala tulee muotoon

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a \cdot \frac{h}{r}a \\ A &= \frac{h}{2r}a^2 \quad \|\text{sij. } (2) \\ A(y) &= \frac{h}{2r} \cdot (r^2 - y^2) \quad \text{1p (4p)} \end{aligned}$$

Lasketaan tilavuus

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \frac{h}{2r}(r^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{h}{2r}\int_{-r}^{r}(r^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \quad (r^2 - y^2 \text{ on parillinen}) \\
&= \frac{h}{2r}\cdot 2\int_{0}^{r}(r^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \quad \text{1p (5p)} \\
&= \frac{h}{r} \Big/_{0}^{r} (r^2 y - \frac{1}{3}y^3) \\
&= \frac{h}{r}\cdot\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - 0\right) \\
&= \frac{2}{3}hr^2
\end{aligned}$$

Vastaus: Tilavuus on $\frac{2}{3}hr^2$. 1p (6p)

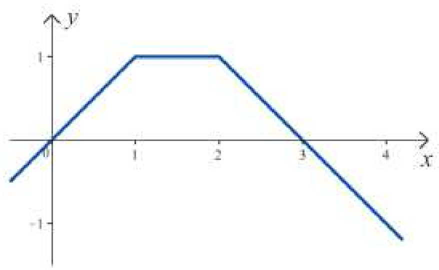
Huom! Integraalit voi lausekkeiden selvittämisen jälkeen laskea myös laskimella.

11. Alla on funktion f derivaattafunktion kuvaaja $y = f'(x)$. Lisäksi funktio f toteuttaa ehdon $f(0) = 0$.

a) Kirjoita derivaatan $f'(x)$ lauseke paloittain määriteltynä funktiona välillä $0 \leq x \leq 4$.

b) Muodosta funktion $f(x)$ lauseke paloittain määriteltynä välillä $0 \leq x \leq 4$.

c) Määritä funktion f suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 4$.



Ratkaisu.

a) Kuvaajasta nähdään, että

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f'(2) = 1 \quad \text{ja} \quad f'(4) = -1.$$

1p

Lisäksi derivaatan kuvaaja on suora väleillä $[0, 1]$, $[1, 2]$ ja $[2, 4]$. Soveltamalla kulmakertoimen kaavaa

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

sekä suoran yhtälöä

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

saadaan

$$\begin{cases} f'(x) - f'(0) & = \frac{f'(1)-f'(0)}{1-0}(x-0), \quad \text{jos } 0 \leq x < 1 \\ f'(x) - f'(1) & = \frac{f'(2)-f'(1)}{2-1}(x-1), \quad \text{jos } 1 \leq x < 2 \\ f'(x) - f'(2) & = \frac{f'(4)-f'(2)}{4-2}(x-2), \quad \text{jos } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Täten

$$f'(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{jos } 1 \leq x < 2 \\ -x + 3, & \text{jos } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

1p (2p)

b)

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x, & \text{kun}\quad 0\le x<1\\ \displaystyle\int \mathrm{d}x, & \text{kun}\quad 1\le x<2\\ \displaystyle\int(-x+3)\,\mathrm{d}x, & \text{kun}\quad 2\le x\le 4\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+C, & \text{kun}\quad 0\le x<1\\ x+D, & \text{kun}\quad 1\le x<2\\ -\frac{1}{2}x^2+3x+E, & \text{kun}\quad 2\le x\le 4\end{cases}$$ 1p (3p)

Nyt $f(0)=0$, joten

$$\frac{1}{2}\cdot 0^2+C=0$$
$$C=0$$

Lisäksi integraalifunktio on jatkuva, joten

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1).$$

Tällöin

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{2}x^2=1+D$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1^2=1+D$$
$$D=-\frac{1}{2}$$

sekä

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2).$$

Tällöin

$$\lim_{x\to 2-}x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2+E$$
$$2-\frac{1}{2}=-2+6+E$$
$$E=-\frac{5}{2}$$

Näin ollen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{kun } 1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & \text{kun } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$ 1p (4p)

c) Luetaan derivaatan nollakohdat kuvaajasta.

$$f'(0) = 0$$
$$f'(3) = 0$$

Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[0, 4]$ ja derivoituva avoimella välillä $]0, 4[$, se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa. 1p (5p)

$$f(0) = 0$$
$$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{5}{2} = 2$$
$$f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

Vastaus: Suurin arvo on $f(3) = 2$ ja pienin arvo on $f(0) = 0$. 1p (6p)

12. Funktion $f(x)$ derivaatan likiarvoja pisteessä x_0 voidaan laskea lausekkeen

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

avulla, kun $h>0$ on pieni. Oletetaan, että $f(x)=\sin(x)$, $x_0=0{,}5$ ja $h=10^{-p}$, kun $p=3,\ldots,10$. Mikä näistä p:n arvoista antaa parhaan likiarvon luvulle $f'(x_0)$? Tehtävässä muuttujan x yksikkö on radiaani.

Ratkaisu.

$\boxed{\text{Vastausvaihtoehto 1}}$

Tiedetään, että

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Osoitetaan, että funktio $g:]0,\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$,

$$g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$

on monotoninen. Derivoimalla ja käyttämällä summakaavoja saadaan, että

$$\begin{aligned}
g'(h)&=\frac{h\cos(x_0+h)-(\sin(x_0+h)-\sin(x_0))}{h^2}\\
&=\frac{h(\cos(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)\sin(h))-(\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h))+\sin(x_0)}{h^2}\\
&=\frac{\cos(x_0)(h\cos(h)-\sin(h))+\sin(x_0)(1-h\sin(h)-\cos(h))}{h^2}\quad \text{1p}
\end{aligned}$$

Havaitaan, että $\cos(x_0)>0$ ja $\sin(x_0)>0$. Välillä $[0,\frac{\pi}{2}[$ määritellään funktiot

$$\begin{aligned}
g_1(h)&=h\cos(h)-\sin(h)\\
g_2(h)&=1-h\sin(h)-\cos(h).
\end{aligned}$$

Sijoittamalla $h=0$ saadaan $g_1(0)=g_2(0)=0$. Derivoimalla

$$\begin{aligned}
g_1'(h)&=\cos(h)-h\sin(h)-\cos(h)\\
&=-h\sin(h)<0,\quad \text{kun } h\in\,]0,\frac{\pi}{2}[\\
g_2'(h)&=-\sin(h)-h\sin(h)+\sin(h)\\
&=-h\sin(h)<0,\quad \text{kun } h\in\,]0,\frac{\pi}{2}[,\quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}$$

joten g_1 ja g_2 ovat aidosti väheneviä. Siten

$$\begin{aligned} g_1(h) < g_1(0) = 0 \quad \text{ja} \\ g_2(h) < g_2(0) = 0, \qquad \text{kun } h \in \,]0, \frac{\pi}{2}[. \end{aligned}$$

Näin ollen $\cos(x_0)g_1(h) < 0$ ja $\sin(x_0)g_2(h) < 0$. Siis on saatu, että

$$g'(h) = \frac{\cos(x_0)g_1(h) + \sin(x_0)g_2(h)}{h^2} < 0,$$

eli g on aidosti vähenevä. 1p (3p) Nyt jos $0 < h_1 < h_2$, niin

$$g(h_1) > g(h_2),$$

joten

$$f'(x_0) - g(h_1) < f'(x_0) - g(h_2).$$ 1p (4p)

Lisäksi

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} g(h) \geq g(h_1),$$

koska g on vähenevä. Siten

$$|f'(x_0) - g(h_1)| < |f'(x_0) - g(h_2)|.$$ 1p (5p)

$10^{-p} \leq 10^{-3} < \frac{\pi}{2}$, joten parhaan likiarvon saa sillä p, jolla vastaava h on pienin, eli $\underline{\underline{p = 10}}$. 1p (6p)

VASTAUSVAIHTOEHTO 2

Tässä on vastattu hieman tehtävännosta poikkeavaan kysymykseen "Mikä näistä p:n arvoista antaa parhaan likiarvon luvulle $f'(x_0)$, kun likiarvo lasketaan kokelaan laskimella?"
Tämän kaltainen ratkaisu on esitetty myös YTL:n julkaisemassa asiakirjassa "Hyvän ratkaisun piirteet". Sen vuoksi uskomme, että tällä ratkaisulla voi saada täydet pisteet, vaikkei "Hyvän ratkaisun piirteet" sidokaan YTL:ää tehtävien pisteytyksessä.

$$\mathrm{D}\sin(x) = \cos(x)$$

Sijoitetaan $h = 10^{-p}$:n eri arvot laskimella lausekkeeseen

$$\begin{aligned} E(h) &= \left|\cos(x_0) - \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}\right| \\ &= \left|\cos(0{,}5) - \frac{\sin(0{,}5+h)-\sin(0{,}5)}{h}\right| \end{aligned}$$

p	h	$E(h)$
3	10^{-3}	0,00023985901 ...
4	10^{-4}	0,0000239727 ...
5	10^{-5}	0,0000023970 ...
6	10^{-6}	0,0000002398 ...
7	10^{-7}	0,0000000218 ...
8	10^{-8}	0,0000000381 ...
9	10^{-9}	0,0000004381 ...
10	10^{-10}	0,0000025618 ... 5p

Vastaus: Laskimella Casio fx-9860G tarkin arvo saadaan, kun $p = 7$. 1p (6p)

13. Tarkastellaan positiivisia kokonaislukuja n ja k, joille

$$n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k) = 1007$$

a) Osoita, että tällaiset luvut n ja k toteuttavat yhtälön $(k+1)(2n+k) = 2014$.
b) Määritä luvun 2014 kaikki alkutekijät.
c) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n ja k, jotka toteuttavat a-kohdan yhtälön.

Ratkaisu.

a) Aritmeettisen summan kaavalla

$$n + (n+1) + \ldots + (n+k) = (k+1)\frac{n+(n+k)}{2}, \quad \text{1p}$$

eli

$$\begin{aligned} (k+1)\frac{n+(n+k)}{2} &= 1007 \\ \frac{(k+1)(2n+k)}{2} &= 1007 \quad \| \cdot 2 \\ (k+1)(2n+k) &= 2014 \quad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

b)

1p (3p)

$$2014 = 2 \cdot 1007 = \underline{\underline{2 \cdot 19 \cdot 53}} \quad \text{1p (4p)}$$

c) Koska $k+1 < k+2n$, ja molemmat luvuista $k+1$ ja $2n+k$ ovat positiivisia kokonaislukuja, n ja k toteuttavat jonkin seuraavista yhtälöpareista:

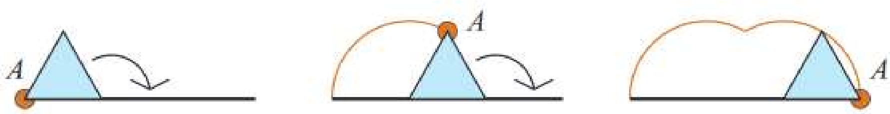
1p (5p)

- $\begin{cases} k+1 = 1 \\ 2n+k = 2014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ n = 1007 \end{cases}$ Ei kelpaa, sillä $k > 0$.
- $\begin{cases} k+1 = 2 \\ 2n+k = 1007 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 503 \end{cases}$
- $\begin{cases} k+1 = 19 \\ 2n+k = 106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 18 \\ n = 44 \end{cases}$
- $\begin{cases} k+1 = 38 \\ 2n+k = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 37 \\ n = 8 \end{cases}$

Vastaus: $\underline{\underline{n = 503 \text{ ja } k = 1,\ n = 44 \text{ ja } k = 18 \text{ tai } n = 8 \text{ ja } k = 37.}}$ 1p (6p)

*14. Erään tarinan mukaan ihmiskunta kokeili liikkumista säännöllisten monikulmioiden avulla ennen kuin pyörä keksittiin.

a) Tasasivuinen kolmio kiertyy oikealle kuvion mukaisesti, kunnes kärki A osuu uudelleen alustaan. Kärki A piirtää kuvion mukaisen käyrän. Laske käyrän pituus, kun kolmion piiri on p. (2 p.)



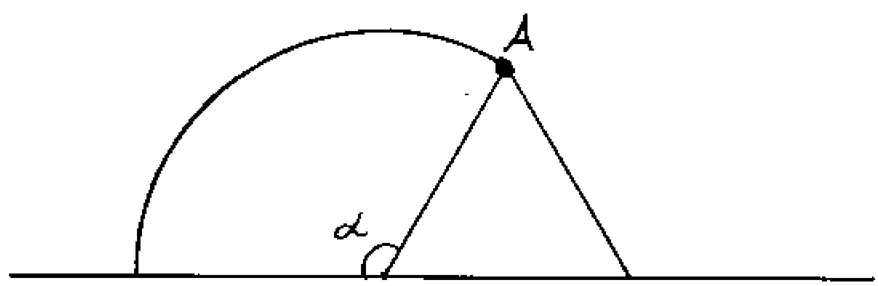
b) Hahmottele vastaavat käyrät neliön ja kuusikulmion tapauksessa. Kummassakin tapauksessa monikulmio kiertyy niin monta kertaa, että vasemmalla alhaalla oleva kärki osuu uudelleen alustaan. (2 p.)

c) Laske b-kohdan käyrän pituus neliölle, jonka piiri on p. (2 p.)

d) Laske b-kohdan käyrän pituus kuusikulmiolle, jonka piiri on p. (3 p.)

Ratkaisu.

a) Liike jakautuu kahteen osaan, joissa piste A liikkuu ympyrärataa pitkin.



Ympyräliikkeen säde on molemmissa tapauksissa kolmion sivun pituus, eli $\frac{p}{3}$, koska kolmio on tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60°, joten

$$\alpha = 180° - 60° = 120°$$

Koska $\frac{p}{3}$-säteisen ympyrän kaaren pituus on

$$2\pi\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi p,$$

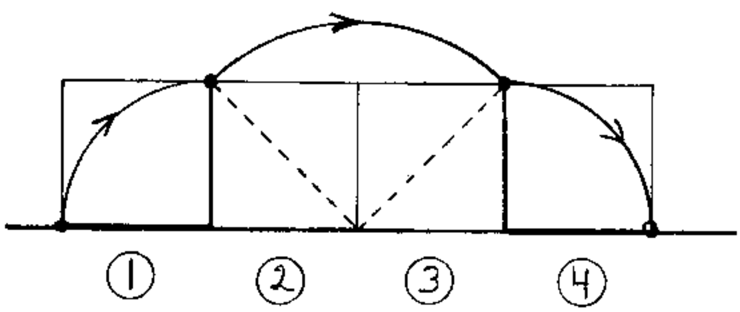
120° sektoria vastaava kaarenpituus on

$$\frac{120°}{360°} \cdot \frac{2}{3}\pi p = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\pi p = \frac{2}{9}\pi p. \text{ 1p}$$

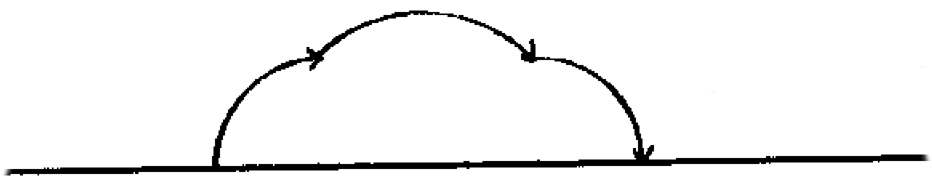
Käyrä muodostuu kahdesta tällaisesta kaaresta, joten sen pituus on

$$2 \cdot \frac{2}{9}\pi p = \underline{\underline{\frac{4}{9}\pi p}} \text{ 1p (2p)}$$

b) Piirretään ensin neliön liike hahmottamisen helpottamiseksi.

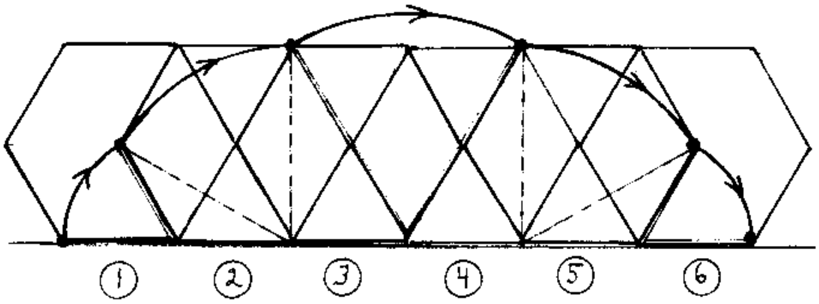


Huomataan, että se koostuu kolmesta ympyränkaaresta, joiden säteet ovat valitun kärjen etäisyydet muista kärjistä, eli neliön sivun pituus, neliön halkaisija ja vielä kerran sivun pituus. Käyrä näyttää siis tältä:



1p (3p)

Kuusikulmion tapauksessa tarkastelu on samankaltainen.

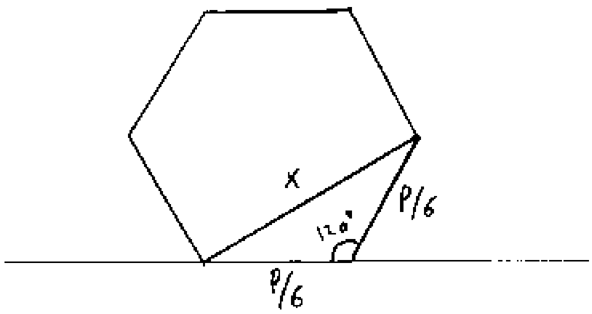


1p (4p)

c) Neliön piiri on p, joten sen sivun pituus on $\frac{p}{4}$. Ensimmäisellä ja viimeisellä käännöksellä valittu kärki kääntyy 90° viereisen kärjen ympäri (säde $\frac{p}{4}$). Neliön halkaisijan pituus on $\sqrt{2}$ kertaa sivun pituus, eli $\frac{\sqrt{2}p}{4}$. Käyrän keskimmäinen ympyränkaari syntyy, kun valittu piste kääntyy 90° vastakkaisen kärjen ympäri (säde $\frac{\sqrt{2}p}{4}$). Täten käyrän pituus on a-kohdan tapaan

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \left(\frac{p}{4}\right) + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}p}{4}\right) \quad \text{1p (5p)} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}p}{4} \\
&= \frac{p\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} p\pi \\
&= \underline{\underline{(2+\sqrt{2})\frac{\pi p}{8}}} \quad \text{1p (6p)}
\end{aligned}
$$

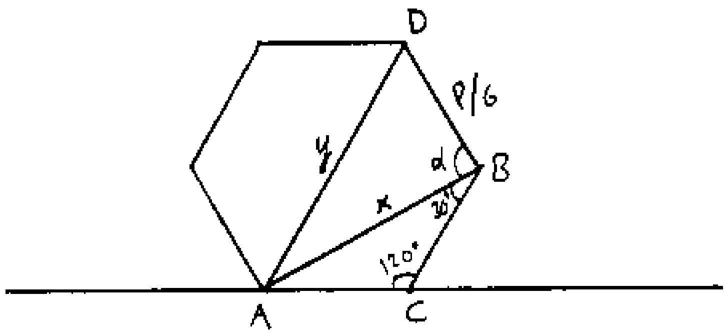
d) Säännöllisen kuusikulmion kulmat ovat 120°, minkä voi nähdä jakamalla kuusikulmion kolmioiksi. Ensimmäisen ja viimeisen pyörähdyksen säde on kuusikulmion sivun pituus, eli $\frac{p}{6}$. Lasketaan toisen ja toiseksi viimeisen pyörähdyksen säde.



Kosinilauseella saadaan

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \left(\frac{p}{6}\right)^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 - 2\frac{p}{6}\frac{p}{6}\cos(120^\circ) \quad \| \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2} \\
x^2 &= 2\left(\frac{p}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{6}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{p}{6}\right)^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{p}{6}\right)^2 \\
x &= \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{3}p}{6} \quad \text{1p (7p)}
\end{aligned}
$$

Keskimmäisen pyörähdyksen säde on kuusikulmion halkaisija. Lasketaan sen pituus.



Kolmio ABC on tasakylkinen, joten $\sphericalangle CAB$ ja $\sphericalangle ABC$ ovat yhtäsuuret, eli 30°. Täten

$$\begin{aligned} \alpha + 30^\circ &= 120^\circ \\ \alpha &= 90^\circ, \end{aligned}$$

eli kolmio ABD on suorakulmainen ja sen kateetit ovat $\frac{p}{6}$ ja $x = \frac{\sqrt{3}p}{6}$. Täten halkaisija saadaan Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}p}{6}\right)^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 \\ &= 3\left(\frac{p}{6}\right)^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{p}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2p}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{p}{3}\right)^2 \\ y &= \underset{(-)}{+} \frac{p}{3} \quad \text{1p (8p)} \end{aligned}$$

Näin ollen käyrän pituus saadaan laskettua kuten aiemmin. Jokainen pyörähdyskulma on

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

joten käyrän pituus on

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{p}{6}\right) + 2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}p}{6}\right) + \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{3} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{p}{6} + \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{3} \\
&= \frac{p\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}p\pi}{9} + \frac{p\pi}{9} \\
&= \frac{2p\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}p\pi}{9} \\
&= \underline{\underline{(2+\sqrt{3})\frac{p\pi}{9}}} \quad \text{1p (9p)}
\end{aligned}
$$

*15. Välillä $[-1, 1]$ jatkuvien funktioiden f ja g skalaaritulo $f * g$ määritellään kaavalla

$$f * g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funktiot ovat *ortogonaaliset*, jos $f * g = 0$.

a) Määritellään $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ ja $f_2(x) = x^2$, kun $x \in [-1, 1]$. Niiden avulla määritellään funktiot $g_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2$, käyttämällä kaavoja

$$g_0(x) = f_0(x), \quad g_1(x) = f_1(x) - \frac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0} g_0(x) \quad \text{ja}$$
$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0(x) - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1(x).$$

Sievennä funktioiden g_1 ja g_2 lausekkeet. (4 p.)

b) Osoita, että funktiot g_j ja g_k ovat ortogonaaliset kaikilla eri indekseillä $0 \leq j < k \leq 2$. (2 p.)

c) Olkoon $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Määritä vakioille a, b ja c sellaiset arvot, että funktiot h ja g_k ovat ortogonaaliset jokaisella $k = 0, 1, 2$. (3 p.)

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned}
g_0 * f_1 &= \int_{-1}^{1} g_0(x) f_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} f_0(x) f_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0 * g_0 &= \int_{-1}^{1} g_0(x)g_0(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} x \\
&= 1 - (-1) \\
&= 2 \quad \text{1p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= f_1(x) - \frac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0} g_0(x) \\
&= x - \frac{0}{2} \cdot 1 \\
&= x \quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0 * f_2 &= \int_{-1}^{1} g_0(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^3 \\
&= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_1 * f_2 &= \int_{-1}^{1} g_1(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!\!-1}^{\,1} \frac{1}{4}x^4 \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1 * g_1 &= \int_{-1}^{1} g_1(x) g_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x \cdot x\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!\!-1}^{\,1} \frac{1}{3}x^3 \\
&= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \\
&= \frac{2}{3} \quad \text{1p (3p)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2(x) &= f_2(x) - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0(x) - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1(x) \\
&= x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}} \cdot x \\
&= x^2 - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{g_1(x) = x \text{ ja } g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.}}$ 1p (4p)

b) Osoitetaan, että $g_0 * g_1 = g_0 * g_2 = g_1 * g_2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
g_0 * g_1 &= \int_{-1}^{1} g_0(x) g_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g_0(x) \left[f_1(x) - \frac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0} g_0(x) \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g_0(x) f_1(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0} \int_{-1}^{1} g_0(x) g_0(x)\,\mathrm{d}x \\
&= g_0 * f_1 - \frac{g_0 * f_1}{\cancel{g_0 * g_0}} \cancel{g_0 * g_0} \\
&= g_0 * f_1 - g_0 * f_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_0 * g_2 &= \int_{-1}^{1} g_0(x) g_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g_0(x) \left[f_2(x) - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0(x) - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1(x) \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g_0(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} \int_{-1}^{1} g_0(x) g_0(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} \int_{-1}^{1} g_0(x) g_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= g_0 * f_2 - \frac{g_0 * f_2}{\cancel{g_0 * g_0}} \cancel{g_0 * g_0} - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_0 * g_1 \\
&= g_0 * f_2 - g_0 * f_2 - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} \cdot 0 \\
&= 0 \quad \text{1p (5p)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1 * g_2 &= \int_{-1}^{1} g_1(x) g_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g_1(x) \left[f_2(x) - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0(x) - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1(x) \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g_1(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} \int_{-1}^{1} g_0(x) g_1(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} \int_{-1}^{1} g_1(x) g_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= g_1 * f_2 - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0 * g_1 - \cancel{\frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1 * g_1} \\
&= g_1 * f_2 - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} \cdot 0 - g_1 * f_2 \\
&= 0 \quad \text{1p (6p)}
\end{aligned}
$$

c) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$$
\begin{aligned}
h * g_0 &= \int_{-1}^{1} h(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{a}{3} \cdot 1^3 + \frac{b}{2} \cdot 1^2 + c \cdot 1 \\
&\quad - \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{a}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{b}{2} \cdot (-1)^2 - c \cdot (-1) \\
&= \frac{2a}{3} + 2c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h * g_1 &= \int_{-1}^{1} h(x) g_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c) \cdot x\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 \\
&= \frac{1}{5} \cdot 1^5 + \frac{a}{4} \cdot 1^4 + \frac{b}{3} \cdot 1^3 + \frac{c}{2} \cdot 1^2 \\
&\quad - \frac{1}{5} \cdot (-1)^5 - \frac{a}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{b}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{c}{2} \cdot (-1)^2 \\
&= \frac{2}{5} + \frac{2b}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h * g_2 &= \int_{-1}^{1} h(x) g_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^5 + ax^4 + \left(b - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(c - \frac{a}{3}\right)x^2 - \frac{b}{3}x - \frac{c}{3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{5}x^5 + \frac{b - \frac{1}{3}}{4}x^4 + \frac{c - \frac{a}{3}}{3}x^3 - \frac{b}{6}x^2 - \frac{c}{3}x \\
&= \frac{1}{6} \cdot 1^6 + \frac{a}{5} \cdot 1^5 + \frac{b - \frac{1}{3}}{4} \cdot 1^4 + \frac{c - \frac{a}{3}}{3} \cdot 1^3 - \frac{b}{6} \cdot 1^2 - \frac{c}{3} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot (-1)^6 \\
&\quad - \frac{a}{5} \cdot (-1)^5 - \frac{b - \frac{1}{3}}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{c - \frac{a}{3}}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{b}{6} \cdot (-1)^2 + \frac{c}{3} \cdot (-1) \\
&= \frac{2a}{5} + \frac{2\left(c - \frac{a}{3}\right)}{3} - \frac{2c}{3} \\
&= \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} - \frac{2a}{9} - \frac{2c}{3} \\
&= \frac{8a}{45} \quad \text{1p (7p)}
\end{aligned}
$$

Jotta h ja g_k olisivat ortogonaaliset, on oltava $h{*}g_k = 0$. Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} h * g_0 = 0 \\ h * g_1 = 0 \\ h * g_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + 2c = 0 \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b = 0 \\ \frac{8a}{45} = 0 \end{cases}$$ 1p (8p)

$$\underline{\underline{\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{3}{5} \\ c = 0 \end{cases}}}$$ 1p (9p)

Huom! Kaikki integroinnit voi tehdä myös laskimella.