YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

23.3.2011

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}.$$

b) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 \leq x$.

c) Ratkaise yhtälö

$$\left|\frac{3}{2}x - 6\right| = 6.$$

2. **a)** Osakkeen arvo oli $35,50$ euroa. Se nousi ensin 12 %, mutta laski seuraavana päivänä 10 %. Kuinka monta prosenttia arvo nousi yhteensä näiden muutosten jälkeen?

b) Suora kulkee pisteiden $(-2,1)$ ja $(5,-3)$ kautta. Määritä sen kulmakerroin.

c) Sievennä $e^{5\ln 2 - \ln 8}$ välivaiheet esittäen.

3. Olkoon $f(x) = xe^{-x^2}$ ja $g(x) = 2e^{-x^2}$.

a) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.

b) Laske $f'(1)$.

c) Laske integraali $\int_0^1 f(x)\, dx$.

4. Määritä se toisen asteen polynomi, joka saa pisteissä $x = 0,$ $x = 1$ ja $x = 2$ samat arvot kuin funktio $f(x) = 2^x$.

5. Määritä polynomin $x(x+3)(5-x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,5]$.

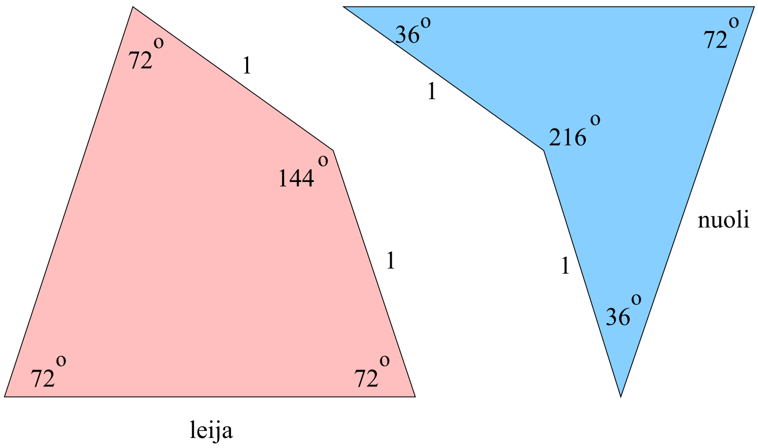
6. Lasten Lotossa rastitaan alle kuvatusta ruudukosta kolme ruutua ja arvonnassa muodostetaan kolmen numeron oikea rivi. Laske todennäköisyydet saada nolla, yksi, kaksi tai kolme oikein. Mikä on näiden todennäköisyyksien summa?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7. Osa Helsingin Keskuskatua muutettiin kävelykaduksi ja päällystettiin Penrosen laatoilla, jotka keksi englantilainen matemaatikko Roger Penrose 1970-luvulla. Niiden avulla taso voidaan laatoittaa äärettömän monella eri tavalla niin, ettei laatoitus ole jaksollinen. Laattoja on kahta eri muotoa, leija ja nuoli. Molemmat ovat nelikulmioita, joiden kulmien suuruudet ja osa sivujen pituuksista on merkitty kuvioon.

a) Laske muiden sivujen pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Laske laattojen pinta-alojen likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



Lähde: http://blogisisko.blogspot.com/2009/11/penrosen-laatat-keskuskadulla.html (17.5.2010)

8. Olkoon $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$. Esitä vektori $\overline{a}$ summana vektoreista $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, joista $\overline{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja $\overline{v}$ kohtisuorassa vektoria $\overline{b}$ vastaan.

9. Lukujonon termit määritellään rekursiokaavalla

$$a_1 = \frac{5}{4}, \quad a_n = -\frac{3}{4}a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

a) Määritä jonon yleisen termin a_n lauseke.

b) Laske $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

10. Funktio $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Laske käyrien $y = f(x)$, $y = f(x) + \sin x$ ja suorien $x = 0$, $x = 2\pi$ rajaaman alueen pinta-ala.

11. **a)** Määritä sellainen kerroin a, että

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq -1, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & x > -1, \end{cases}$$

on jatkuva kaikkialla.

b) Onko funktio $f(x)$ tällöin derivoituva kaikkialla?

c) Laske $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

12. Tutki, onko luku $46^{78} + 89^{67}$ jaollinen viidellä.

13. Jaa polynomi $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ mahdollisimman matalaa astetta oleviin tekijöihin.

***14.** Funktiota $f(x) = \cos x$ approksimoidaan polynomilla $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

a) Näytä, että $f(x) \geq g(x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. (3 p.)

b) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. (2 p.)

c) Määritä funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ erotuksen suurin arvo, kun $-\pi \leq x \leq \pi$. (2 p.)

d) Laske funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $-\pi \leq x \leq \pi$. (2 p.)

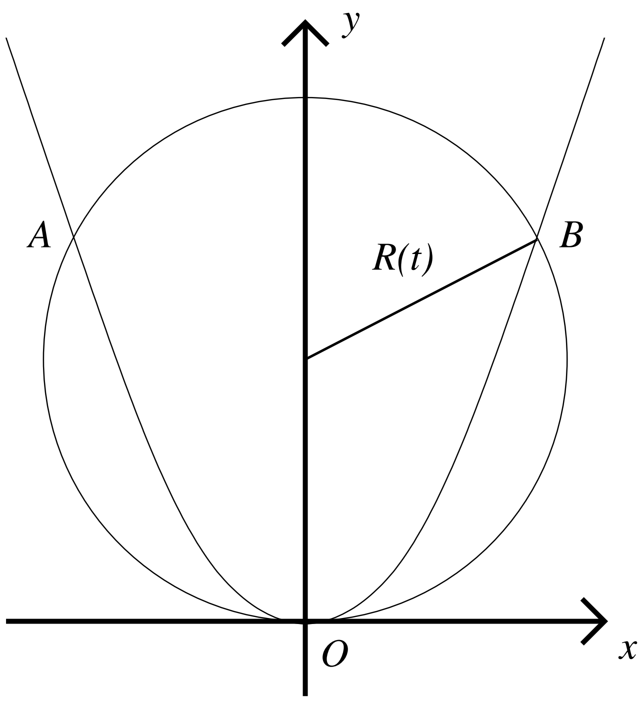
***15.** Olkoon $f(x) = x^2$. Paraabelin $y = f(x)$ kaarevuutta origossa voidaan tutkia Isaac Newtonin (1642−1727) esittämällä sivuavien ympyröiden (circulum osculans) menetelmällä. Menetelmä perustuu siihen, että jokaisella parametrin $t > 0$ arvolla paraabelin pisteiden $O(0,0)$, $A(-t, t^2)$ ja $B(t, t^2)$ kautta kulkee yksikäsitteinen ympyrän kehä.

a) Määritä tämän ympyrän säde $R(t)$ parametrin t avulla lausuttuna. (3 p.)

b) Laske rajaympyrän säde $R_0 = \lim_{t \to 0+} R(t)$. Tätä kutsutaan paraabelin kaarevuussäteeksi origossa. (2 p.)

c) Johda lauseke funktiolle $g(x)$, jonka kuvaaja on rajaympyrän alapuoli. (2 p.)

d) Näytä, että $g''(0) = f''(0) = 1/R_0$. Tämä on paraabelin kaarevuus origossa. (2 p.)



Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä

Pitkä matematiikka, kevät 2011

Mallivastaukset, 23.3.2011

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta.

MA-FY Valmennus Oy on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön ja omien yo-vastausten tarkistamista varten. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MA-FY Valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää näitä mallivastauksia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Määrittelyehto: $x \neq 0$ ja $x - 2 \neq 0$, eli $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} &= \frac{3}{x-2} \quad \| \cdot x(x-2) \\ 2(x-2) &= 3x \quad \text{1 p} \\ 2x - 4 &= 3x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

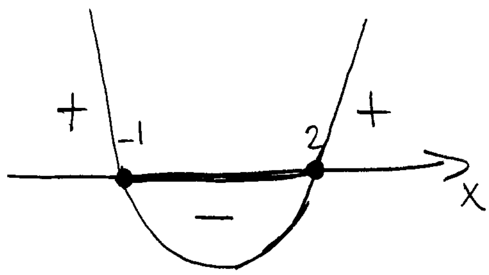
Vastaus: $\underline{\underline{x = -4}}$ 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &\leq x \\ x^2 - x - 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{1 \pm 3}{2} \\ x &= 2 \quad \text{tai} \quad x = -1 \quad \text{1 p (3 p)} \end{aligned}$$



Vastaus: $\underline{\underline{-1 \leq x \leq 2}}$ 1 p (4 p)

c)

$$\left| \frac{3}{2}x - 6 \right| = 6$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 6 &= 6 \\ \frac{3}{2}x &= 12 \quad \| : \frac{3}{2} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 6 &= -6 \quad \text{1 p (5 p)} \\ \frac{3}{2}x &= 0 \quad \| : \frac{3}{2} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 8}}$ 1 p (6 p)

2. a) Osakkeen arvo muutosten jälkeen on

$$35{,}50\,€ \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}90 = 35{,}784\,€.$$ 1 p

Siten arvo nousi yhteensä

$$\begin{aligned}\frac{35{,}784 - 35{,}50}{35{,}50} &= 0{,}008 \\ &= 0{,}80\%\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Arvo nousi yhteensä 0,80 \%.}}}$ 1 p (2 p)

b) Pisteiden (-2, 1) ja (5, -3) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\begin{aligned}k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ k &= \frac{-3 - 1}{5 - (-2)} \\ k &= -\frac{4}{7}\end{aligned}$$ 1 p (3 p)

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kulmakerroin on } -\frac{4}{7}.}}$ 1 p (4 p)

c)

$$\begin{aligned}e^{5\ln 2 - \ln 8} &= \frac{e^{5\ln 2}}{e^{\ln 8}} \\ &= \frac{\left(e^{\ln 2}\right)^5}{e^{\ln 8}} \\ &= \frac{2^5}{8} \\ &= \frac{2^5}{2^3} \\ &= 2^2 \\ &= \underline{\underline{4}}\end{aligned}$$

1 p (5 p)

1 p (6 p)

3.
$f(x) = xe^{-x^2}$
$g(x) = 2e^{-x^2}$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ xe^{-x^2} &= 2e^{-x^2} \\ xe^{-x^2} - 2e^{-x^2} &= 0 \\ e^{-x^2}(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$e^{-x^2} = 0$	tai	$x - 2 = 0$	1 p
ei ratkaisua, koska		$x = 2$	
$e^{-x^2} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$			

Vastaus: $\underline{\underline{x = 2}}$ 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2} \cdot x \\ f'(x) &= \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2} \qquad \text{1 p (3 p)} \\ f'(1) &= \left(1 - 2 \cdot 1^2\right) \cdot e^{-1^2} \\ f'(1) &= -e^{-1} \\ f'(1) &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{f'(1) = -\frac{1}{e}}}$ 1 p (4 p)

c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 xe^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 -2xe^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \Big/_0^1 e^{-x^2} \qquad \text{1 p (5 p)} \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-1^2} - e^{-0^2}\right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Vastaus: $\underline{\underline{\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}}$ 1 p (6 p)

4. Merkitään toisen asteen polynomia $p(x)$:llä. Se on muotoa

$$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{1 p}$$

Tiedetään siis, että

$$\begin{cases} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \\ p(2) = f(2) \end{cases} \quad \text{, missä } f(x) = 2^x$$

Saadaan

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2^0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2^1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 & (1) \\ a + b + c = 2 & (2) \\ 4a + 2b + c = 4 & (3) \end{cases} \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöpariin (2) ja (3), saadaan

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 4a + 2b + 1 = 4 \end{cases} \qquad \text{1 p (3 p)}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \quad \| \cdot (-2) & (4) \\ 4a + 2b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - 2b = -2 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases}$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Sijoitetaan yhtälöön (4), saadaan

$$\frac{1}{2} + b = 1$$

$$b = \frac{1}{2} \qquad \text{1 p (5 p)}$$

Siis $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ ja $c = 1$, joten $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

Vastaus: Polynomi on $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. 1 p (6 p)

5. Merkitään

$$p(x) = x(x+3)(5-x), \quad x \in [-1, 5]$$

Saadaan

$$\begin{aligned} p(x) &= x(5x - x^2 + 15 - 3x) \\ &= x(-x^2 + 2x + 15) \\ &= -x^3 + 2x^2 + 15x && \text{1 p} \\ p'(x) &= -3x^2 + 4x + 15 && \text{1 p (2 p)} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} p'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 4x + 15 &= 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 15}}{2 \cdot (-3)} \\ x &= \frac{-4 \pm 14}{-6} \\ x &= \frac{-2 \pm 7}{-3} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(x = -\frac{5}{3}\right)}_{\text{ei ko. välillä}} \quad \text{tai} \quad x = 3 \qquad \text{2 p (4 p)}$$

$p(x)$ on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva, joten se saa suurimman tai pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä. 1 p (5 p)

$$\begin{aligned} p(-1) &= -1 \cdot (-1+3) \cdot [5 - (-1)] = -12 \text{ (pienin arvo)} \\ p(5) &= 0 \\ p(3) &= 36 \text{ (suurin arvo)} \end{aligned}$$

Vastaus: Suurin arvo välillä [-1, 5] on 36 ja pienin arvo -12. 1 p (6 p)

6. Merkitään satunnaismuuttujalla X oikein saatujen numeroiden lukumäärää. Kysytyt todennäköisyydet ovat

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}\approx 29{,}2\%\qquad \text{1 p}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 21}{120}=\frac{21}{40}=52{,}5\%\qquad \text{1,5 p (2,5 p)}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 7}{120}=\frac{7}{40}=17{,}5\%\qquad \text{1,5 p (4 p)}$$

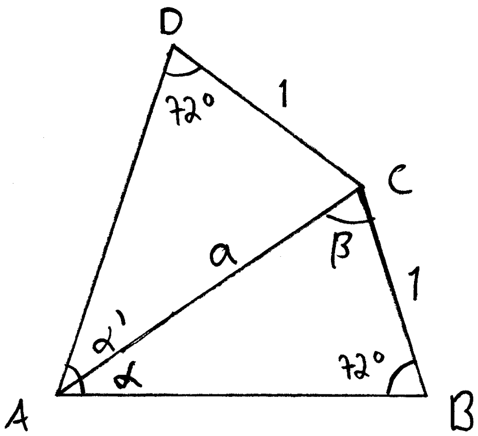
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{120}\approx 0{,}83\%\qquad \text{1 p (5 p)}$$

Todennäköisyyksien summa

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{7}{24}+\frac{21}{40}+\frac{7}{40}+\frac{1}{120}=1$$

Vastaus: Todennäköisyydet kysytyssä järjestyksessä ovat 29,2 %, 52,5 %, 17,5 % ja 0,83 %. Todennäköisyyksien summa on 1. 1 p (6 p)

7. a)

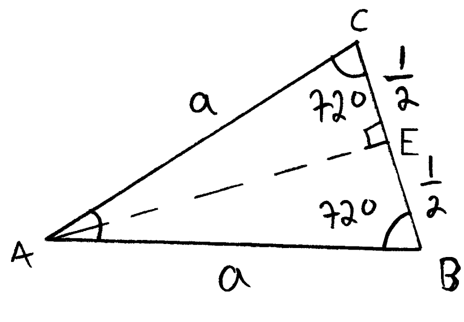


$\alpha + \alpha' = 72°$, joten α ja α' ovat teräviä kulmia. Siten kolmiot ABC ja ADC ovat yhteneviä ssk-säännön mukaan (sivut CD ja BC, yhteinen sivu AC ja kulmat B ja D). 1 p

Yhtenevyydestä seuraa

$$\alpha = \frac{72°}{2} = 36° \text{ ja}$$
$$\beta = \frac{144°}{2} = 72°,$$

joten kolmio ABC on tasakylkinen.

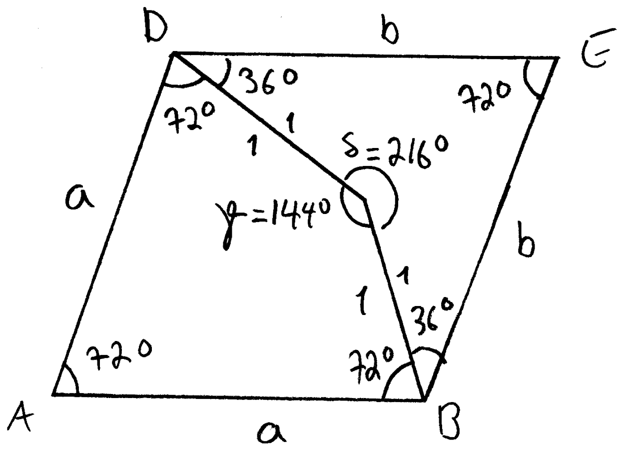


Suorakulmaisen kolmion ABE trigonometriasta saadaan

$$\cos 72° = \frac{\frac{1}{2}}{a} \quad \| \cdot \frac{a}{\cos 72°}$$
$$a = \frac{1}{2\cos 72°}$$
$$a = 1{,}61803\ldots$$
$$a = 1{,}618$$

1 p (2 p)

Piirretään leija ja nuoli-kuviot yhteen.



Nyt $\gamma + \delta = 144^\circ + 216^\circ = 360^\circ$, joten laatat liittyvät toisiinsa yllä esitetyllä tavalla siten, että kaksi sivua molemmista laatoista yhtyvät. Yhteen liitetyt laatat muodostavat kuvion, joka on suunnikas, koska vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Suunnikas on neljäkäs, koska vierekkäiset sivut ovat samat. Tällöin $a = b$.

Vastaus: Muiden sivujen pituus on 1,618. 1 p (3 p)

b) Määritetään kolmion ABC pinta-ala.

$$\begin{aligned}
A_{\text{K}} &= \frac{1}{2} AB \sin\alpha, \text{ missä} \\
A &= 1, \\
B &= a = 1{,}6180\ldots \text{ ja} \\
\alpha &= 72^\circ.
\end{aligned}$$

Leijan pinta-ala on

$$\begin{aligned}
A_L &= 2 \cdot A_{\text{K}} \\
&= \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 1 \cdot a \sin\alpha \\
&= 1 \cdot 1{,}6180\ldots \cdot \sin 72^\circ \\
&= 1{,}53884\ldots \\
&\approx 1{,}539.
\end{aligned}$$

1 p (4 p)

Neljäkkään ABED pinta-ala on

$$A_S = a^2 \sin\alpha.$$

Nuolen pinta-ala on

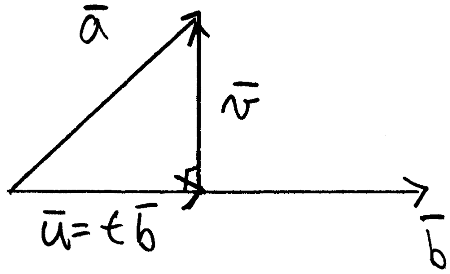
$$\begin{aligned} A_N &= A_S - A_L \\ &= a^2 \sin\alpha - a\sin\alpha \\ &= a\sin\alpha(a-1) \\ &= 1{,}6180\ldots \cdot \sin 72^\circ \cdot (1{,}6180\ldots - 1) \\ &= 0{,}95105\ldots \\ &\approx 0{,}951. \end{aligned}$$

Vastaus: Leijan pinta-ala on 1,539 ja nuolen 0,951. 2 p (6 p)

8.

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= 4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k} \\
\bar{b} &= 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}, \quad \bar{u} = t\bar{b} = 2t\bar{i} + t\bar{j} - 2t\bar{k}
\end{aligned}$$

Piirretään vektorit.



1 p

Nyt

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= t\bar{b} + \bar{v} \\
\bar{v} &= \bar{a} - t\bar{b} \qquad \text{1 p (2 p)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Koska vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{v}$ ovat kohtisuorassa, on pistetulo

$$\begin{aligned}
\bar{b} \cdot \bar{v} &= 0 \quad \| \text{ Sij. } (1) \qquad \text{1 p (3 p)} \\
\bar{b} \cdot (\bar{a} - t\bar{b}) &= 0 \\
\bar{b} \cdot \bar{a} - t\bar{b} \cdot \bar{b} &= 0 \\
2 \cdot 4 + (-5) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - [2t \cdot 2 + t \cdot 1 + (-2t) \cdot (-2)] &= 0 \\
-3 - 9t &= 0 \\
-9t &= 3 \quad \| : (-9) \\
t &= -\frac{1}{3}. \qquad \text{1 p (4 p)}
\end{aligned}$$

Lasketaan vektorit.

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\bar{i} + \left(-\frac{1}{3}\right)\bar{j} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\bar{k} \\
&= -\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k} \qquad \text{1 p (5 p)}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \bar{a} - \bar{u} \\
&= 4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k} - \left(-\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}\right) \\
&= \frac{14}{3}\bar{i} - \frac{14}{3}\bar{j} + \frac{7}{3}\bar{k}.
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\bar{a} = \frac{14}{3}\bar{i} - \frac{14}{3}\bar{j} + \frac{7}{3}\bar{k} + \left(-\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}\right).}}$ 1 p (6 p)

9.

$$a_1 = \frac{5}{4}$$
$$a_n = -\frac{3}{4}a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

a) Rekursiokaavasta nähdään, että lukujono on geometrinen jono, missä

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{3}{4}a_n}{a_n} = -\frac{3}{4},$$ 1 p

joten geometrisen jonon yleinen termi

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_n = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Vastaus: Yleinen termi $a_n = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. 2 p (3 p)

b) Koska $|q| = \frac{3}{4} < 1$, on tarkasteltava geometrinen jono suppeneva, jolloin sarja 1 p (4 p)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{4}}{1-(-\frac{3}{4})} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$$ 1 p (5 p)

Vastaus: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{5}{7}$ 1 p (6 p)

10. Funktio $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, jolloin välillä $[0, 2\pi]$ käyrien $y = f(x)$ ja $y = f(x) + \sin x$ väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$A = \int_0^{2\pi} |g(x)|dx, \quad \text{missä} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \sin x - f(x) \\ &= \sin x \end{aligned}$$

Pinta-ala (1) on myös kysytty pinta-ala. Yhtälöstä (1) saadaan

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x|dx$$ 2 p

Koska

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{kun } 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, & \text{kun } \pi \le x \le 2\pi, \end{cases}$$ 1 p (3 p)

saadaan pinta-ala muotoon

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx && \text{1 p (4 p)} \\ &= \Big/_{0}^{\pi} -\cos x + \Big/_{\pi}^{2\pi} \cos x && \text{1 p (5 p)} \\ &= -\cos\pi - (-\cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi \\ &= -(-1) - (-1) + 1 - (-1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus: Pinta-ala on 4. 1 p (6 p)

11. a)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{kun } x \le -1 \\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & \text{kun } x > -1 \end{cases}$$

Polynomifunktio ax^2 on jatkuva, kun $x < -1$.

Rationaalifunktio on jatkuva, kun $x > -1$, sillä sen nimittäjä $1 + x^2 > 0$ kaikilla x:n reaaliarvoilla.

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = -1$, jos

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x), \text{ ja} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(1). \tag{2}$$

Lasketaan toispuoleiset raja-arvot.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1} ax^2 \\ &= a \cdot (-1)^2 \\ &= a. \qquad \text{1 p} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2}{1+x^2} \\ &= \frac{1^2}{1+1^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Sijoitetaan (3) ja (4) yhtälöön (1), saadaan

$$a = \frac{1}{2}$$

Nyt

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = f(-1),$$

joten ehdot (1) ja (2) täyttyvät.

Vastaus: f on kaikkialla jatkuva, kun $a = \frac{1}{2}$. 1 p (2 p)

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & \text{kun } x \le -1 \\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & \text{kun } x > -1 \end{cases}$$

Kun $x < -1$, niin funktio f on polynomifunktio $\frac{1}{2}x^2$, joten se on derivoituva. Kun $x > -1$, niin f on derivoituva rationaalifunktio. Ehto sille, että f on derivoituva myös kohdassa $x = -1$ on

$$f'_-(-1) = f'_+(-1).$$

Lasketaan toispuoleiset derivaatat.

$$\begin{aligned}
f'_-(-1) &= \lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2}{x+1} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{2}(x^2-1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{2}(x-1)\overset{1}{\cancel{(x+1)}}}{\underset{1}{\cancel{x+1}}} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{1}{2}(x-1) \\
&= \frac{1}{2}(-1-1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

1 p (3 p)

Tästä eteenpäin raja-arvo voidaan määrittää myös derivoimalla funktio

1/2 x^2 derivointikaavojen

avulla, koska vasemman puoleista raja-arvoa laskettaessa erotusosamäärän lauseke on sama kuin f(x):llä. Menettely on kuitenkin perusteltava.

$$\begin{aligned}
f'_+(-1) &= \lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{(-1)^2}{1+(-1)^2}}{x+1} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{{}^{2)}\frac{x^2}{1+x^2} - {}^{1+x^2)}\frac{1}{2}}{x+1} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{2x^2-1-x^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{1}{x+1} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{2(1+x^2)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{(x-1)\overset{1}{\cancel{(x+1)}}}{2(1+x^2)\underset{1}{\cancel{(x+1)}}} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{x-1}{2(1+x^2)}
\end{aligned}$$

Kuten edellä, myös tämä raja-arvo voidaan laskea derivointikaavojen avulla. Menettely on perusteltava.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1-1}{2\left(1+(-1)^2\right)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Tällöin $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$, joten $\underline{\underline{\text{funktio } f(x) \text{ ei ole kaikkialla derivoituva.}}}$ 1 p (4 p)

c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2}^{(x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} && \text{1 p (5 p)} \\
&= \frac{1}{0+1} \\
&= \underline{\underline{1.}} && \text{1 p (6 p)}
\end{aligned}
$$

12. Tutkitaan lukujen 46 ja 89 jakojäännöksiä, kun ne jaetaan luvulla 5.

1° $46 = 5 \cdot 1 + 1$.

Huomataan, että $1 = 5 \cdot 0 + 1$, joten

$$46 \equiv 1(\text{mod } 5) \quad \text{ja} \quad 46^{78} \equiv 1^{78}(\text{mod } 5).$$ 1 p

2° $89 = 5 \cdot 17 + 4$.

Huomataan, että $-1 = 5 \cdot (-1) + 4$, joten

$$89 \equiv -1(\text{mod } 5) \quad \text{ja} \quad 89^{67} \equiv (-1)^{67}(\text{mod } 5).$$ 1 p (2 p)

Nyt

$$\begin{aligned} 46^{78} + 89^{67} &\equiv 1^{78} + (-1)^{67}(\text{mod } 5) && \text{1 p (3 p)} \\ &\equiv 1 - 1(\text{mod } 5) && \text{1 p (4 p)} \\ &\equiv 0(\text{mod } 5). \end{aligned}$$

Huomataan, että luku 0 on jaollinen viidellä. Tällöin luku $\underline{\underline{46^{78} + 89^{67}}}$ <u>on jaollinen viidellä.</u> 2 p (6 p)

13.

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$$

Koska vakiotermi on -1, niin hyvä arvaus polynomin yhdeksi nollakohdaksi on $x = 1$ tai $x = -1$. Tutkitaan asia.

$$p(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0$$

Polynomilla $p(x)$ on nollakohta $x = 1$, joten tekijälauseen mukaan sillä on tekijä $x - 1$. Selvitetään toinen tekijä jakamalla $p(x)$ jakokulmassa.

1 p

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \\
\hline
x - 1 & \cancel{2x^4} - x^3 + x^2 - x - 1 \\
 & -\cancel{2x^4} - 2x^3 \\
\hline
 & \quad \cancel{x^3} \\
 & \quad -\cancel{x^3} - x^2 \\
\hline
 & \qquad 2x^2 \\
 & \qquad -2x^2 - 2x \\
\hline
 & \qquad\quad \cancel{x} \\
 & \qquad\quad -\cancel{x} - 1 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Polynomi saadaan muotoon

$$p(x) = (x - 1)(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$ 1 p (2 p)

Tutkitaan polynomia

$$
\begin{aligned}
R(x) &= 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \\
&= (2x^3 + 2x) + (x^2 + 1) \\
&= 2x(x^2 + 1) + 1 \cdot (x^2 + 1) \\
&= (2x + 1)(x^2 + 1).
\end{aligned}
$$ 2 p (4 p)

1 p (5 p)

Binomia $x^2 + 1$ ei voi jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole nollakohtia. Näin ollen $p(x)$ jakaantuu tekijöihin

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x - 1)R(x) \\
&= (x - 1)(2x + 1)(x^2 + 1).
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{p(x) = (x - 1)(2x + 1)(x^2 + 1)}}$ 1 p (6 p)

⋆**14.** a)

$$f(x) = \cos x \quad \text{ja}$$
$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Väite on

$$\begin{aligned} f(x) &\geq g(x) \\ f(x) - g(x) &\geq 0 \\ \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x &\geq 0 \\ h(x) &\geq 0, \end{aligned}$$

jossa $h(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{x^2}{x} - 1 + \cos x$.
Etsitään funktion h derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ x - \sin x &= 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

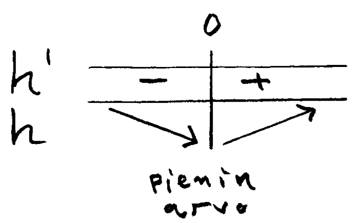
Yhtälön (1) eräs ratkaisu on $x = 0$, koska $h'(0) = 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$. 1 p
Funktion h' derivaattafunktio on

$$h''(x) = 1 - \cos x$$

Toisaalta kaikilla x pätee

$$\begin{aligned} 1 &\geq \cos x \\ 1 - \cos x &\geq 0 \\ h''(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

h' on siis aidosti kasvava, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta, joten ainoa nollakohta on $x = 0$. Siitä että h' on aidosti kasvava seuraa edelleen, että $h'(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $h'(x) > 0$, kun $x > 0$. Funktion h kulkukaavio on



1 p (2 p)

Pienin arvo on

$$h(0) = \frac{0^2}{2} - 1 + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$

Näin ollen $h(x) \geq 0$ kaikilla x, mistä seuraa väite. 1 p (3 p)

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \qquad (2) \\ f(x) - g(x) &= 0, \end{aligned}$$

joka tulee a-kohdan merkintöjä käyttäen muotoon

$$h(x) = 0$$ 1 p (4 p)

a-kohdan perusteella $h(x)$ pienin arvo on $h(x) = 0$ kohdassa $x = 0$. Näin ollen $h(x) > 0$ muilla x:n arvoilla, joten yhtälön (2) ainoa ratkaisu on $x = 0$.

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0}}$ 1 p (5 p)

c) On siis etsittävä funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ suurin arvo välillä $[-\pi, \pi]$. Jatkuva ja derivoituva funktio h saa suurimman arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. 1 p (6 p)

$$\begin{aligned} h(-\pi) &= \frac{(-\pi)^2}{2} - 1 + \cos(-\pi) \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 1 - 1 \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 2 \approx 2{,}93 \\ h(0) &= \frac{0^2}{2} - 1 + \cos 0 = -1 + 1 = 0 \\ h(\pi) &= \frac{\pi^2}{2} - 1 \cos \pi \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 1 - 1 \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 2 = h(-\pi) \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Erotuksen } f(x) - g(x) \text{ suurin arvo välillä } [-\pi, \pi] \text{ on } \frac{\pi^2}{2} - 2}}$ 1 p (7 p)

d) Pinta-ala on

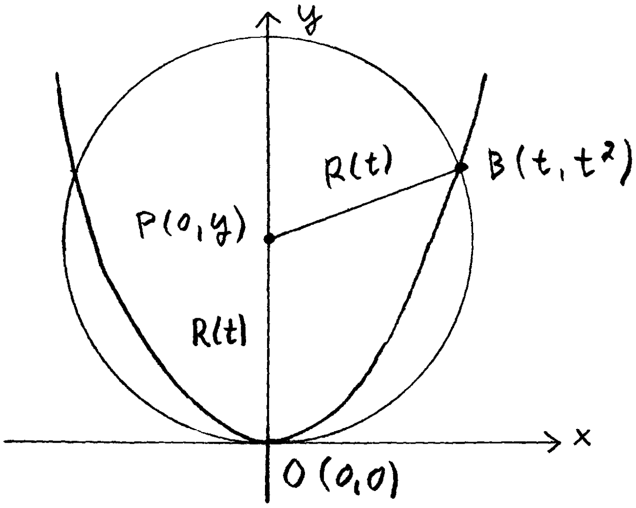
$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx$$

a-kohdan kulkukaavion mukaan $f(x) - g(x) = h(x) > 0$ kaikilla x, joten

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \right) dx \\ &= \Big/_{\!\!-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{6}x^3 - x + \sin x \right) \qquad \text{1 p (8 p)} \\ &= \frac{1}{6}\pi^3 - \pi + \sin \pi - \left[\frac{1}{6}(-\pi)^3 - (-\pi) + \sin(-\pi) \right] \\ &= \frac{1}{6}\pi^3 - \pi + 0 + \frac{1}{6}\pi^3 - \pi + 0 \\ &= \frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty ala on $\frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi$. 1 p (9 p)

$\star$**15.** a)



PO ja PB ovat kyseisen ympyrän säteitä, joten

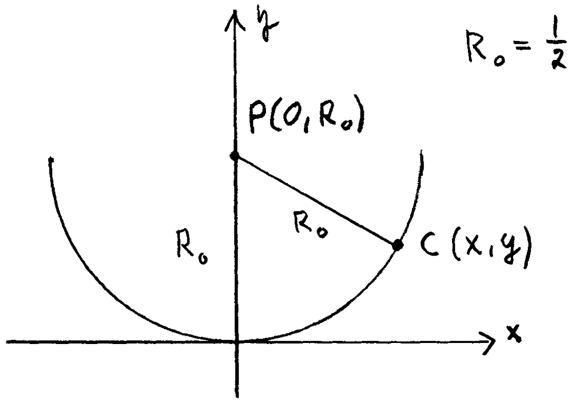
$$
\begin{aligned}
|PB| &= |PO| && \text{1 p}\\
\sqrt{(t-0)^2 + (t^2-y)^2} &= y \quad \|()^2\\
t^2 + t^4 - 2yt^2 + y^2 &= y^2\\
2yt^2 &= t^4 + t^2 \quad \| : (2t^2)\\
y &= \frac{1}{2}(t^2+1) && \text{1 p (2 p)}
\end{aligned}
$$

Toisaalta $R(t) = y$, joten $\underline{\underline{R(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)}}$. 1 p (3 p)

b)

$$R_0 = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{1}{2}(t^2+1)\right] = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

Vastaus: $\underline{\underline{R_0 = \frac{1}{2}}}$ 2 p (5 p) c)



Jana PC on rajaympyrän säde, joten

$$\begin{aligned}
|PC| &= R_0 \\
\sqrt{(x-0)^2+(y-R_0)^2} &= R_0 \quad \|()^2 \qquad \text{1 p (6 p)} \\
x^2+y^2-2Ry+R_0^2 &= R_0^2 \\
y^2-2R_0y+x^2 &= 0 \quad \| \text{ Sij. } R_0 = \frac{1}{2} \\
y^2-y+x^2 &= 0 \\
y &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot x^2}}{2} \\
y &= \frac{1 \stackrel{(-)}{\pm} \sqrt{1-4x^2}}{2}
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Funktio } g(x) = y(x) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x^2}).}}$ 1 p (7 p)

d) 2. kertaluvun derivaattafunktiot ovat

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \mathrm{D}[\mathrm{D}\,x^2] = \mathrm{D}(2x) = 2 \\
g'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(0-\mathrm{D}\sqrt{1-4x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \\
g''(x) &= \frac{\mathrm{D}(2x)\cdot\sqrt{1-4x^2}-2x\cdot\mathrm{D}\sqrt{1-4x^2}}{\left(\sqrt{1-4x^2}\right)^2} \\
&= \frac{2\cdot\sqrt{1-4x^2}-2x\frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2} \qquad \text{1 p (8 p)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{1-4x^2} + \dfrac{16x^2}{\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2}$$

2. derivaatan arvot kohdassa $x = 0$ ovat

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2 \\ g''(0) &= \frac{2 \cdot \sqrt{1-4\cdot 0^2} - \dfrac{16 \cdot 0^2}{\sqrt{1-4\cdot 0^2}}}{1-4\cdot 0^2} \\ &= \frac{2-0}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Toisaalta $1/R_0 = \frac{1}{1/2} = 2$, joten $f''(0) = g''(0) = 1/R_0$, mikä tuli osoittaa. 1 p (9 p)