YO-MALLIVASTAUKSET

LYHYT MATEMATIIKKA

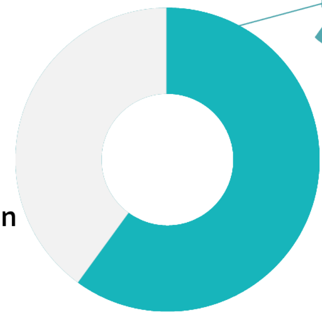
SYKSY 2018

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2018 haussa

40 %

kaikista lääketieteellisten opiskelupaikoista.



58 %

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

58 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti ja Teemu perustivat MAFY:n vuonna 2008. Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ennen MAFY:n perustamista ja Antti työskenteli tuntiopettajana TKK:lla.

Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista PK-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetin oppimateriaalien kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Timo Kalinainen ja Tuomas Hauvala.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

KÄYTTÖEHDOT

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto

1. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x-2)(x+3)$.

   a) Laske $f(4)$.
   b) Ratkaise yhtälö $f(x) = 0$.
   c) Ratkaise yhtälö $f(x) = -6$.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} f(4) &= (4-2)(4+3) \\ &= 2 \cdot 7 \\ &= \underline{\underline{14}} \end{aligned}$$

1p

1p
(2p)

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x-2)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tulon nollasäännöllä:

$$\begin{aligned} (x-2)(x+3) &= 0 \\ x-2 = 0 \quad &\text{tai} \quad x+3 = 0 \\ \underline{\underline{x = 2}} \quad &\text{tai} \quad \underline{\underline{x = -3}} \end{aligned}$$

1p
(3p)

1p
(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Kerrotaan sulut auki ja sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan:

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x^2 - 2x + 3x - 6 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x^2 + x - 6 &= 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm 5}{2}
\end{aligned}
$$

1p (3p)

$$x = \frac{4}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 2}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x = -3}}$$

1p (4p)

c) Ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -6 \\
(x-2)(x+3) &= -6 \\
x^2 - 2x + 3x - 6 &= -6 \\
x^2 + x - 6 &= -6 \qquad \| + 6 \\
x^2 + x &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1}}$

Käytetään tulon nollasääntöä:

$$
\begin{aligned}
x^2 + x &= 0 \\
x(x+1) &= 0
\end{aligned}
$$

1p (5p)

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x = -1}}$$

1p (6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan:

$$
\begin{aligned}
x^2 + x &= 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm 1}{2}
\end{aligned}
$$

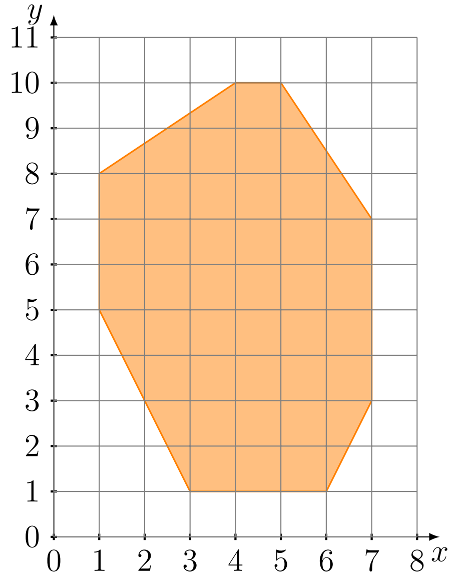
1p (5p)

$$
x = \frac{0}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2}{2}
$$

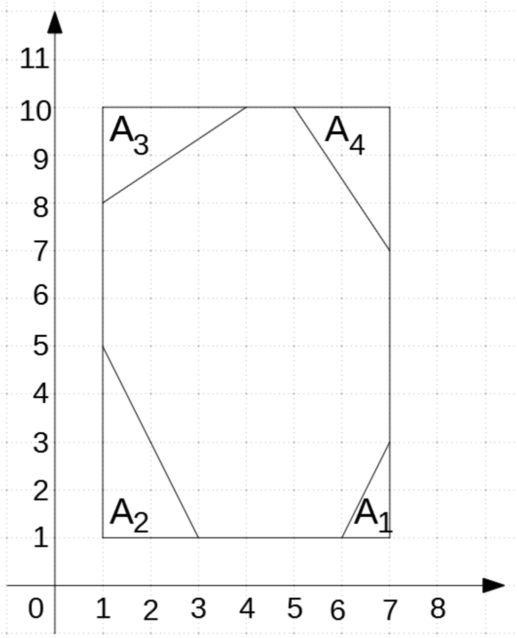
$$
\underline{\underline{x = 0}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x = -1}}
$$

1p (6p)

2. Muotoilukilpailun palkintolautakunta myöntää muistolaatan kilpailun parhaille teoksille. Lautakunnan taiteellinen avustaja tekee ensimmäisen version laatan pienoismallista käyttämällä Geogebra-ohjelman koordinaatistopiirrosta. Hän aloittaa suorakulmiosta, jonka leveys on 6 ja korkeus 9 pituusyksikköä. Leikkaamalla pois tämän suorakulmion kaikki neljä kulmaa eri tavoilla hän päätyy viereisen kuvion monikulmioon. Määritä tämän monikulmion pinta-ala.



Ratkaisu.



Alkuperäisen suorakulmion pinta-ala on

$$A_S = 6 \cdot 9 = 54$$ 1p

Suorakulmiosta leikataan pois neljä suorakulmaista kolmiota, joiden pinta-alat ovat 1p (2p)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \\ A_2 &= \frac{2 \cdot 4}{2} = 4, \\ A_3 &= \frac{3 \cdot 2}{2} = 3, \\ A_4 &= \frac{2 \cdot 3}{2} = 3. \end{aligned}$$

1p (3p)

1p (4p)

Lasketaan kysytty monikulmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= A_S - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \\ A &= 54 - 1 - 4 - 3 - 3 \\ &= 43 \end{aligned}$$

1p (5p)

Vastaus: Kysytty pinta-ala on 43.

1p (6p)

3. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x, joilla lukujono 27, x, 3 on
a) aritmeettinen b) geometrinen.

Ratkaisu.

a) Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, eli $a_{n+1} - a_n = d$ kaikilla n. Nyt on

$$\begin{cases} 27 - x = d \\ x - 3 = d \end{cases}$$

Asetetaan nämä yhtä suuriksi ja ratkaistaan tuntematon x:

$$\begin{aligned} 27 - x &= x - 3 \quad && \| + 3 + x \\ 30 &= 2x && \| : 2 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

1p

1p (2p)

Vastaus: Lukujono on aritmeettinen, kun $x = 15$.

1p (3p)

b) Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, eli $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ kaikilla n. Nyt on

$$\begin{cases} \frac{27}{x} = q \\ \frac{x}{3} = q \end{cases}$$

Asetetaan nämä yhtä suuriksi ja ratkaistaan tuntematon x:

$$\begin{aligned} \frac{27}{x} &= \frac{x}{3} \quad && \| \cdot 3x \\ 81 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{81} \\ x &= \pm 9 \end{aligned}$$

1p (4p)

1p (5p)

Lukujono on siis geometrinen x:n arvoilla $+9$ ja -9. Tehtävässä kysyttiin kuitenkin vain postiivisia kokonaislukuja, joten edellä olevan yhtälön negatiivinen ratkaisu hylätään.

Vastaus: Lukujono on geometrinen, kun $x = 9$.

1p (6p)

4. Hyttysten määrä oli kesätapahtuman alkaessa klo 16.00 noin 80, tuntia myöhemmin noin 120 ja klo 19.00 noin 270. Oletetaan, että hyttysten määrä noudattaa noudattaa eksponentiaalisen kasvun mallia.

 a) Arvioi mallin perusteella hyttysten määrää tilaisuuden päättyessä klo 20.00.
 b) Mikä seuraavista lausekkeista kuvaa parhaiten hyttysten määrää, kun aikaa t mitataan tunteina tilaisuuden alusta lähtien:
 $80 + 40t$ vai $80 \cdot 1{,}5^t$ vai $8 \cdot 10^{t+1}$?
 Perustele vastauksesi.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

a) Tehtävänannon mukaan hyttysten määrä ajanhetkellä $t = 0$ on 80 kappaletta. Merkitään hyttysten lukumäärä tiedetyillä ajanhetkillä.

$N(0) = 80$
$N(1) = 120$
$N(3) = 270$

Käytetään eksponentiaalisen kasvun mallia ja selvitetään kasvutekijä q ensimmäisistä havainnoista.

$$\begin{aligned} N(t) &= q^t \cdot N(0) \\ N(1) &= q^1 \cdot N(0) \\ 120 &= q \cdot 80 \quad || : 80 \\ q &= \frac{120^{(40}}{80} \\ q &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1p

Lasketaan hyttysten määrä klo 20.00 eli neljän tunnin kuluttua alkuhetkestä. Tällöin $t = 4$.

$$\begin{aligned} N(4) &= q^4 \cdot N(0) \\ N(4) &= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 80 \end{aligned}$$

1p
(2p)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3^4}{2^4} \cdot 80 \\
&= \frac{(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)}{(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2)} \cdot 80 \\
&= \frac{9 \cdot 9}{4 \cdot 4} \cdot 80 \\
&= \frac{81 \cdot 80}{16} \\
&= 81 \cdot \frac{80}{16} \\
&= 81 \cdot 5 \\
&= 405 \\
&\approx 410
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kysytty arvio hyttysten määrälle on 410. 1p (3p)

b) Toinen lauseke on sama kuin a-kohdassa johdettu, sillä

$$N(t) = q^t \cdot N(0) = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot 80 = 1{,}5^t \cdot 80.$$

Lauseke 1 ei ole niin hyvä kuin lauseke 2, sillä se kuvaa lineaarista kasvua ja tehtävänannon mukaan mallin kuuluu olla eksponentiaalinen. 1p (4p)

Lauseke 3 kuvaa eksponentiaalista kasvua mutta ei ole niin hyvä kuin lauseke 2, sillä se antaa kolmen tunnin kuluttua hyttysten määräksi

$$N(3) = 8 \cdot 10^4 = 8000 \neq 270.$$ 1p (5p)

Vastaus: Lauseke $80 \cdot 1{,}5^t$ kuvaa parhaiten hyttysten määrää. 1p (6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

a) Tehtävänannon mukaan hyttysten määrä ajanhetkellä $t = 0$ on 80 kappaletta. Merkitään hyttysten lukumäärä tiedetyillä ajanhetkillä.

$N(0) = 80$
$N(1) = 120$
$N(3) = 270$

Selvitetään eksponentiaalisen mallin kasvutekijä q ensimmäisistä havainnoista.

$$q = \frac{N(1)}{N(0)} = \frac{120}{80} = 1{,}5$$

1p

Lasketaan hyttysten määrä klo 20.00 eli neljän tunnin kuluttua alkuhetkestä.

$$N(4) = 1{,}5 \cdot 270 = 270 + \frac{270}{2} = 270 + 135 = 405$$

1p (2p)

Vastaus: Kysytty arvio hyttysten määrälle on 410.

1p (3p)

b) Lauseke 1 kuvaa lineaarista kasvua, joten se ei vastaa tehtävänannon ehtoa, että määrä noudattaa eksponentiaalisen kasvun mallia.

1p (4p)

Toinen lauseke kuvaa eksponentiaalista kasvua. Lisäksi siinä on sama (oikea) kasvutekijä kuin a-kohdassa on laskettu. Myöskin alkuarvo 80 on oikea, sillä

$$N(0) = 80 \cdot 1{,}5^0 = 80 \cdot 1 = 80.$$

1p (5p)

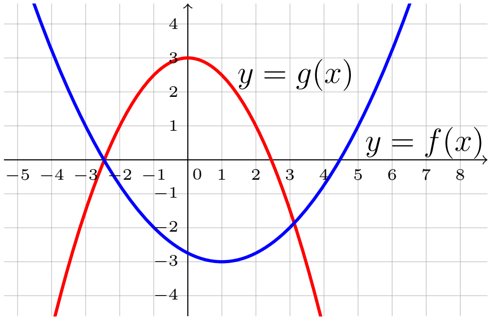
Lauseke 3 kuvaa eksponentiaalista kasvua mutta ei ole niin hyvä kuin lauseke 2, sillä se antaa kolmen tunnin kuluttua hyttysten määräksi

$$N(3) = 8 \cdot 10^4 = 8000 \neq 270.$$

Vastaus: Lauseke $80 \cdot 1{,}5^t$ kuvaa parhaiten hyttysten määrää.

1p (6p)

5. Oheiseen koordinaatistoon on piirretty funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat. Arvioi seuraavien yhtälöiden ratkaisuja kuvan perusteella.



a) $f(x) = g(x)$
b) $f'(x) = 0$
c) $g'(x) = 1$

Ratkaisu.

a) Yhtälö $f(x) = g(x)$ toteutuu silloin, kun kuvaajat leikkaavat. Kuvan perusteella tämä tapahtuu, kun $x = -2{,}5$ja kun $x = 3{,}2$.

1p | 1p (2p)

b) Yhtälö $f'(x) = 0$ toteutuu silloin, kun kuvaajan $y = f(x)$ tangentti on vaakasuora.Tämä tapahtuu kuvan perusteella kohdassa $x = 1{,}0$.

1p (3p) | 1p (4p)

c) Yhtälö $g'(x) = 1$ toteutuu silloin, kun kuvaajan $y = g(x)$ tangentin kulmakerroin on 1, eli tangentti on nouseva ja on 45 °:een kulmassa vaakatasoon nähden.(Derivaatan arvo on yhtä kuin tangentin kulmakerroin.) Kuvan perusteella tämä tapahtuu kohdassa $x = -1{,}0$.

1p (5p) | 1p (6p)

6. Lahjaveroa on maksettava, kun omaisuus siirtyy toiselle henkilölle lahjana ja lahjan arvo on 5 000 euroa tai enemmän. Lahjaveroa on maksettava myös silloin, kun samalta lahjan antajalta kolmen vuoden aikana saatujen lahjojen yhteisarvo on 5 000 euroa tai enemmän. Tällöin lahjojen arvo lasketaan yhteen ja verotus toimitetaan yhteissumman perusteella. Aiemmin maksetut lahjaverot vähennetään maksettavan veron määrästä.

Lahjan arvo (euroa)	Vero alarajan kohdalla (euroa)	Veroprosentti ylimenevästä osasta
5 000–25 000	100	8 %
25 000–55 000	1 700	10 %
55 000–200 0000	4 700	12 %
200 000–1 000 0000	22 100	15 %
1 000 000–	142 100	17 %

Lähde: <`vero.fi`> Luettu 22.11.2017.

Jannika sai isoäidiltään kolmena vuonna peräkkäin rahalahjan. Hän sai ensimmäisenä vuonna 4 300 €, seuraavana 3 800 € ja kolmantena vuonna 2 100 €.
Kuinka paljon Jannika maksaa eri vuosina veroa saamistaan lahjoista? Oletetaan, että verotus pysyy samana koko kolmen vuoden ajan.

Ratkaisu.

Ensimmäisenä vuonna Jannika saa 4 300 € isoäidiltään. Alle 5 000 €:n summasta ei tarvitse maksaa lahjaveroa, joten Jannika ei maksa ensimmäisenä vuonna lainkaan lahjaveroa. 1p

Toisena vuonna Jannika saa 3 800 € isoäidiltään. Yksinään tästä lahjasummasta ei tarvitsisi maksaa lahjaveroa, mutta Jannika on edellisen kolmen vuoden aikana saanut jo 4 300 euroa isoäidiltään. Nämä rahasummat lasketaan siis yhteen ja verotus määräytyy yhteissumman mukaan. Verotettavan lahjan arvo on siis

$$4\ 300\,€ + 3\ 800\,€ = 8\ 100\,€$$

1p (2p)

Ensimmäisestä 5 000 €:sta Jannika maksaa veroa 100 euroa. Tämän alarajan ylittävän osan veroprosentti on 8 %, joten siitä peritään lahjaveroa

$$(8\ 100\,€ - 5\ 000\,€) \cdot 0{,}08 = 3\ 100\,€ \cdot 0{,}08 = 248\,€$$

1p (3p)

Jannika maksaa siis toisena vuonna yhteensä 100 € + 248 € = 348 € lahjaveroa, ensimmäisestä 5 000 €:sta 100 euroa ja tämän alarajan ylittävästä osuudesta 248 euroa. 1p (4p)

Kolmantena vuonna Jannika saa isoäidiltään 2 100 €. Jälleen yksinään tästä lahjasummasta ei tarvitsisi maksaa lahjaveroa, mutta Jannika on edellisten kolmen vuoden aikana saanut 8 100 € isoäidiltään. Verotettavan lahjan arvo on nyt siis

$$8\,100\,€ + 2\,100\,€ = 10\,200\,€$$

Ensimmäisestä 5 000 €:sta masketaan veroa taas 100 euroa. Tämän alarajan ylittävän osan veroprosentti on 8 %, joten siitä peritään lahjaveroa

$$(10\,200\,€ - 5\,000\,€) \cdot 0{,}08 = 5\,200\,€ \cdot 0{,}08 = 416\,€$$

Lahjasta perittävä kokonaisverosumma on siis $100\,€ + 416\,€ = 516\,€$. Jannika on kuitenkin jo edellisenä vuonna maksanut 348 euroa veroa, joten tänä vuonna maksettavaksi jää $516\,€ - 348\,€ = 168\,€$. 1p (5p)

Vastaus: Ensimmäisenä vuonna Jannika ei maksa lainkaan lahjaveroa, toisena vuonna hän maksaa 348 € lahjaveroa ja kolmantena vuonna 168 € lahjaveroa. 1p (6p)

7. Suomalaiset ovat viimeisten vuosikymmenten aikana kasvaneet entistä pidemmiksi, minkä vuoksi poikien ja tyttöjen kasvukäyrät on täytynyt uudistaa. Täysikasvuisen miehen pituus noudattaa nykyisin normaalijakaumaa niin, että keskiarvo on 180,7 cm ja keskihajonta 6,0 cm. Täysikasvuisen naisen pituus on normaalijakautunut, keskiarvo on 167,5 cm ja keskihajonta 5,4 cm.

   a) Kuinka suurella todennäköisyydellä umpimähkään valittu täysikasvuinen suomalaismies on vähintään 190 cm pitkä?
   b) Kuinka suuri prosentuaalinen osuus kaikista täysikasvuisista suomalaisnaisista on pituudeltaan alle 162 cm? Anna vastaus yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.
   c) Millä pituuden arvolla L on voimassa: Vain 4,0 % naisista kasvaa pidemmäksi kuin L? Anna vastaus yhden senttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu.

a) Keskipituus on $\overline{X} = 180{,}7$ cm ja pituuden keskihajonta on $s = 6{,}0$ cm.

Pituuden $X = 190$ cm normitettu arvo on

$$z = \frac{X - \overline{X}}{s} = \frac{190 - 180{,}7}{6{,}0} = 1{,}55.$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys normaalijakauman todennäköisyytenä.

$$\begin{aligned} P(X \geq 190) &= P(z \geq 1,55) \\ &= 1 - P(z \leq 1,55) \\ &= 1 - \Phi(1,55) \\ &= 1 - 0{,}9394 \\ &= 0{,}0606 \\ &\approx 6{,}1\,\% \end{aligned}$$

1p

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 6,1 %.

1p (2p)

b) Keskipituus on $\overline{X} = 167{,}5$ cm ja pituuden keskihajonta on $s = 5{,}4$ cm.

Pituuden $X = 162$ cm normitettu arvo on

$$z = \frac{X - \overline{X}}{s} = \frac{162 - 167{,}5}{5{,}4} = -1{,}0185\ldots \approx -1{,}02.$$

Lasketaan kysytty prosenttiosuus normaalijakauman todennäköisyytenä.

$$\begin{aligned} P(X < 162) &= P(z < -1{,}02) \\ &= P(z > 1{,}02) \\ &= 1 - P(z < 1{,}02) \\ &= 1 - \Phi(1{,}02) \\ &= 1 - 0{,}8461 \\ &= 0{,}1539 \\ &\approx 15\,\% \end{aligned}$$

1p (3p)

Vastaus: Kysytty osuus on 15 %.

1p (4p)

c) Muodostetaan tehtävänannon mukainen yhtälö normaalijakauman todennäköisyyden lausekkeesta. Ratkaistaan tästä yhtälöstä kysyttyä pituutta L vastaava pituuden normitettu arvo z_L:

$$\begin{aligned} P(X > L) &= 0{,}04 \\ 1 - P(X > L) &= 1 - 0{,}04 \\ P(X < L) &= 0{,}96 \\ P(z < z_L) &= 0{,}96 \quad \text{(normitetuille arvoille)} \\ \Phi(z_L) &= 0{,}96 \\ z_L &= 1{,}75 \quad \text{(katsottu taulukkokirjasta)} \end{aligned}$$

1p (5p)

Ratkaistaan kysytty pituus L normitetusta arvosta.

$$\begin{aligned} z_L &= \frac{L - \overline{X}}{s} \quad \| \cdot s \\ s \cdot z_L &= L - \overline{X} \\ L &= s \cdot z_L + \overline{X} \\ L &= 5{,}4 \cdot 1{,}75 + 167{,}5 \\ &= 176{,}95 \\ &\approx 177\,(\text{cm}) \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty pituus on 177 cm.

1p (6p)

8. Digitaalisessa muodossa tallennetun tiedoston koko ilmoitetaan yleensä tavuina. Tavun tavallisimmat monikerrat ovat kilotavu (10^3 tavua), megatavu (10^6 tavua) ja gigatavu (10^9 tavua). Käytännössä tiedot tallennetaan kuitenkin binäärisessä muodossa, jolloin kilo-, mega- ja gigatavun oikea koko on vastaavassa järjestyksessä 2^{10}, 2^{20} ja 2^{30} tavua. Oheinen taulukko kuvaa sitä, kuinka monta prosenttia pienempiä ovat kymmenen potensseina esitetyt tavun monikerrat, kun niitä verrataan vastaaviin kakkosen potensseihin. Selvitä, kuinka taulukkoon merkityt giga- ja teratavujen prosenttien lukuarvot saadaan.

kilotavu	2,34 %
megatavu	4,63 %
gigatavu	6,87 %
teratavu	9,05 %
petatavu	11,18 %
eksatavu	13,26 %

Ratkaisu.

Tehtävänannon taulukossa olevat luvut kuvaavat sitä, *kuinka monta prosenttia kymmenen potensseina esitetyt luvut ovat pienempiä kuin kakkosen potensseina esitetyt.* Koska vertailu tehdään kakkosen potensseina annettuihin lukuihin 2^{10}, 2^{20}, 2^{30} jne., nämä luvut tulevat verrannon nimittäjään. Verrannon osoittajaan taas tulee kakkosen potenssin ja sitä vastaavan kymmenen potenssin erotus, sillä kysymys oli "kuinka monta prosenttia *pienempiä*" kymmenen potensseina ilmoitetut luvut ovat.

Gigatavua vastaava prosenttiluku saadaan siis verrannosta

1p

$$\frac{2^{30}-10^9}{2^{30}} = \frac{1\,073\,741\,824 - 1\,000\,000\,000}{1\,073\,741\,824}$$

1p (2p)

$$= 0{,}068677\ldots$$

$$\approx 6{,}87\ \%$$

1p (3p)

Samalla perusteella teratavua vastaava prosenttiluku saadaan verrannosta

1p (4p)

$$\frac{2^{40}-10^{12}}{2^{40}} = \frac{1\,099\,511\,627\,776 - 1\,000\,000\,000\,000}{1\,099\,511\,627\,776}$$

1p (5p)

$$= 0{,}090505\ldots$$

$$\approx 9{,}05\ \%$$

1p (6p)

9. Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1 TAI 9.2. (Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaan olet opiskellut.)

9.1 (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet) Tarkastellaan muotoa $a_n = 2\sin(\frac{\pi}{2}n) + 5\cos(\frac{\pi}{2}n)$ olevia lukuja, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$. Laske niin monta jonon alkupään lukua, että huomaat jonon toistavan itseään eli olevan jaksollinen. Näyttää siltä, että jollakin luvulla $k \geq 1$ on voimassa $a_{n+k} = a_n$ kaikilla indeksin n arvoilla. Mikä on pienin tällainen luku k?

TAI

9.2 (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet) Tiettyä kolikkoa heitettiin 10 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena oli 8 klaavaa ja 2 kruunaa? Oletetaan, että sekä kruunan että klaavan todennäköisyys on $\frac{1}{2}$.

Ratkaisu.

9.1 Lasketaan lukujonon alkupään jäseniä kunnes havaitaan jaksollisuutta:

$$a_n = 2\sin(\frac{\pi}{2}n) + 5\cos(\frac{\pi}{2}n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n	a_n		
1	$2\sin(\frac{\pi}{2}) + 5\cos(\frac{\pi}{2})$	$= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0$	$= 2$
2	$2\sin(\frac{2\pi}{2}) + 5\cos(\frac{2\pi}{2})$	$= 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1)$	$= -5$
3	$2\sin(\frac{3\pi}{2}) + 5\cos(\frac{3\pi}{2})$	$= 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0$	$= -2$
4	$2\sin(\frac{4\pi}{2}) + 5\cos(\frac{4\pi}{2})$	$= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1$	$= 5$
5	$2\sin(\frac{5\pi}{2}) + 5\cos(\frac{5\pi}{2})$	$= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0$	$= 2$
6	$2\sin(\frac{6\pi}{2}) + 5\cos(\frac{6\pi}{2})$	$= 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1)$	$= -5$
7	$2\sin(\frac{7\pi}{2}) + 5\cos(\frac{7\pi}{2})$	$= 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0$	$= -2$
8	$2\sin(\frac{8\pi}{2}) + 5\cos(\frac{8\pi}{2})$	$= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1$	$= 5$
9	$2\sin(\frac{9\pi}{2}) + 5\cos(\frac{9\pi}{2})$	$= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0$	$= 2$

2p

Jono siis alkaa toistaa itseään, kun $n = 5$. Jonossa toistuu jakso 2, -5, -2, 5.

2p (4p)

Jono on jaksollinen eli $a_{n+k} = a_n$ silloin, kun $k = 4$. Tämä on pienin luku k, jolla jono on jaksollinen.

2p
(6p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

Lisäselitys: Jaksollisuuden voi nähdä myös jonon termien lausekkeesta. Sekä sinin että kosinin jakso on 2π. Kun $k = 4$, voidaan a_{n+k} kirjoittaa auki:

$$\begin{aligned}
a_{n+k} &= 2\sin(\frac{\pi}{2}(n+k)) + 5\cos(\frac{\pi}{2}(n+k)) \\
&= 2\sin(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2}4) + 5\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2}4) \\
&= 2\sin(\frac{\pi}{2}n + 2\pi) + 5\cos(\frac{\pi}{2}n + 2\pi) \\
&= 2\sin(\frac{\pi}{2}n) + 5\cos(\frac{\pi}{2}n) \\
&= a_n
\end{aligned}$$

9.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kyseessä on toistokoe, voidaan siis käyttää binomijakaumaa. Haluttuun lopputulokseen päästään, kun klaavoja saadaan tasan kahdeksan ja kruunia tasan kaksi kappaletta eikä järjestyksellä ole väliä. Binomitodennäköisyys on

$$P = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

missä n on toistojen lukumäärä, k on suotuisten tapahtumien lukumäärä ja p on suotuisten tapahtumien todennäköisyys. Tässä siis lasketaan sitä todennäköisyyttä, että suotuisia tapahtumia eli klaavoja on tasan kahdeksan kappaletta. Nyt siis todennäköisyys on

2p

$$\begin{aligned} P &= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= \frac{45}{2^{10}} \\ &= \underline{\underline{\frac{45}{1024}}} \\ &= 0{,}04394\ldots \\ &\approx \underline{\underline{4{,}4\,\%}} \end{aligned}$$

2p (4p)

2p (6p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

Voidaan aivan yhtä hyvin laskea binomitodennäköisyys sille, että saadaan tasan kaksi kruunaa. Tällöin todennäköisyyden lausekkeeksi tulee

$$\begin{aligned} P &= \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= \frac{45}{1024} \\ &= 0{,}04394\ldots \end{aligned}$$

Lopputulos ei siis riipu siitä, tulkitaanko kruuna vai klaava suotuisaksi tapahtumaksi.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Jokaisella kolikonheittokerralla on kaksi mahdollista lopputulosta, kruuna tai klaava. Kolikkoa heitetään kymmenen kertaa, joten kaikkiaan erilaisia heittosarjoja on yhteensä $2^{10} = 1024$ kappaletta.

Mietitään sitten, kuinka monta suotuisaa heittosarjaa on, toisin sanoen kuinka monella eri tavalla voimme saada halutut 8 klaavaa ja 2 kruunaa. Merkitään klaavoja L:llä, ensimmäiseksi heittyä kruunaa R_1:llä ja toista kruunaa R_2:llä jolloin saadaan erilaisia heittosarjoja:

$$\begin{array}{cccccccccc}
R_1 & R_2 & L & L & L & L & L & L & L & L \\
R_1 & L & R_2 & L & L & L & L & L & L & L \\
R_1 & L & L & R_2 & L & L & L & L & L & L \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
L & R_1 & R_2 & L & L & L & L & L & L & L \\
L & R_1 & L & R_2 & L & L & L & L & L & L \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
L & L & L & L & L & L & L & L & R_1 & R_2
\end{array}$$

Ensimmäisellä kruunalla on siis yhdeksän eri mahdollista paikkaa heittosarjassa. Jos se tulee ensimmäisellä heitolla, jälkimmäisellä kruunalla on yhdeksän mahdollista paikkaa heittosarjassa. Jos ensimmäinen kruuna tulee toisella heitolla, on jälkimmäisellä kruunalla enää kahdeksan mahdollista paikkaa. Jos ensimmäinen kruuna tulee vasta yhdeksännellä heitolla, on jälkimmäisellä kruunalla tasan yksi mahdollisuus, eli sen on tultava viimeisellä heitolla. 2p

Sopivia heittosarjoja on siis yhteensä $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$ kappaletta. Nyt voidaan laskea todennäköisyys suotuisien tapahtumien (heittosarjojen) ja kaikkien tapahtumien suhteena: 2p (4p)

$$P = \frac{45}{\underline{\underline{1024}}} = 0{,}04394\ldots \approx 4{,}4\,\%$$

2p (6p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

Suotuisten heittosarjojen lukumäärän voi laskea myös seuraavasti: Jos kymmenen heiton sarjassa on tasan yksi kruuna, sillä on kymmenen mahdollista sijaintia sarjassa. Jos heittosarjaan lisätään toinen kruuna, sillä on enää yhdeksän mahdollista sijaintia sarjassa. Tällä tavalla saadaan siis $10 \cdot 9 = 90$ erilaista heittosarjaa.

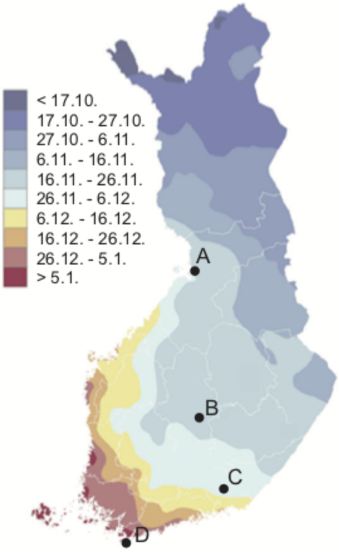
Tässä ei kuitenkaan ole vielä huomioitu sitä, että kruunien keskinäisellä järjestyksellä ei ole lopputuloksen kannalta väliä. Heittosarjat

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} \\ \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{R}_2 & \mathrm{R}_1 & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} \end{array}$$

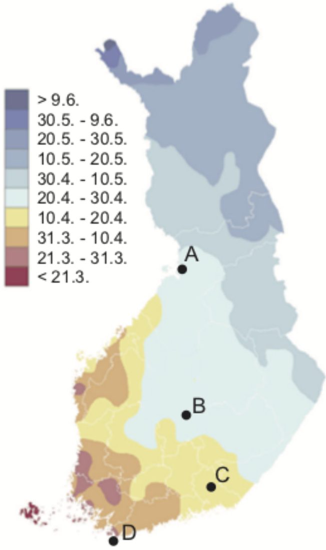
ovat siis lopputuloksen kannalta identtisiä. Erilaisia suotuisia heittosarjoja on siis $\frac{90}{2} = 45$ kappaletta.

10. Ilmatieteen laitoksen tilastoista selviää, milloin maamme eri osiin tulee pysyvä lumipeite ja milloin se lähtee. Ajalla, jona lumipeite on pysyvä, tarkoitetaan talven pisintä jaksoa, jolloin lunta on maassa yhtäjaksoisesti vähintään 1 cm.

 a) Kartassa on esitetty pistein neljä kaupunkia A–D. Arvioi ja laske, kuinka kauan kunkin neljän kaupungin alueella on pysyvä lumipeite.
 b) Eräässä Pohjois-Suomen kaupungissa pysyvän lumipeitteen kesto on arviolta 210 päivää. Kyseisen kaupungin lumipeitteen kestoa merkitään indeksiarvolla 100. Arvioi ja laske, mitä lukuarvoja kaupungit A–D saavat, kun indeksiarvot ovat suoraan verrannollisia pysyvän lumipeitteen kestoon.



Pysyvän lumipeitteen tulon ajankohta vertailukaudella 1981–2010



Pysyvän lumipeitteen lähtemisen ajankohta vertailukaudella 1981–2010

Lähde: `ilmatieteenlaitos.fi`. Luettu 1.3.2018. Muokkaus: YTL.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

 a) Tehdään taulukko kaupungeista, pysyvän lumipeitteen tulon ja lähtemisen ajankohdista sekä pysyvän lumipeitteen kestosta. Oletetaan, että kyseessä ei ole karkausvuosi eli helmikuussa on vain 28 päivää. Kuvan perusteella kaupunkiin A sataa pysyvä lumipeite joko samaan aikaan kaupungin B tai C kanssa, alueiden raja kulkee kaupunkia merkkaavan ympyrän halki. Oletetaan, että kaupunkiin A sataa pysyvä lumi samaan aikaan kaupungin B kanssa.

kaupunki	alku pvm.	loppu pvm.	kesto min (päiviä)	kesto max (päiviä)
A	16.11. – 26.11.	20.4. – 30.4.	146	166
B	16.11. – 26.11.	20.4. – 30.4.	146	166
C	26.11. – 6.12.	10.4. – 20.4.	126	146
D	> 5.1.	21.3. – 31.3.		85

alku ja loppu pvm. 1p

1p (2p)

1p (3p)

Vastaus: Pysyvän lumipeitteen kesto on siis kaupungissa A 146 – 166 päivää, kaupungissa B 146 – 166 päivää, kaupungissa C 126 – 146 päivää ja kaupungissa D alle 85 päivää.

b) Indeksin pisteluku on 100, kun lumipeitteen kesto on 210 päivää. Indeksiarvot ovat suoraan verrannollisia pysyvän lumipeitteen kestoon, joten esimerkiksi kestoa 146 päivää vastaava indeksiarvo x saadaan yhtälöstä

$$\frac{x}{100} = \frac{146}{210},$$

josta saadaan

$$x = 100 \cdot \frac{146}{210}$$

Lasketaan vastaavalla tavalla indeksiarvot kaupunkien A–D lumipeitteiden kestoille:

kaupunki	kesto min (päiviä)	kesto max (päiviä)	indeksi min	indeksi max
A	146	166	≈ 69	≈ 79
B	146	166	≈ 69	≈ 79
C	126	146	≈ 60	≈ 69
D		85	0	40

1p (5p)

1p (6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

a) Tehdään taulukko kaupungeista, pysyvän lumipeitteen tulo- ja lähtöpäivämääristä ja pysyvän lumipeitteen keskimääräisestä kestosta.

kaup.	alku pvm.	loppu pvm.	lumipeite keskimäärin	kesto keskimäärin (päiviä)
A	16.11. – 26.11.	20.4. – 30.4.	21.11. – 25.4.	156
B	16.11. – 26.11.	20.4. – 30.4.	21.11. – 25.4.	156
C	26.11. – 6.12.	10.4. – 20.4.	1.12. – 15.4.	136
D	$>$ 5.1.	21.3. – 31.3.	11.2.* – 26.3.	43

alku ja loppu pvm. 1p

1p (2p)

1p (3p)

*: Koska aineiston perusteella tiedetään kaupungista D vain, että pysyvä lumipeite sataa 5.1. jälkeen ja sulaa aikaisintaan 21.3., lasketaan keskiarvo pysyvän lumipeitteen tulemisen ääriarvoista: 6.1. ja 20.3.

Vastaus: Pysyvän lumipeitteen keskimääräinen kesto on kaupungissa A 156 päivää, kaupungissa B 156 päivää, kaupungissa C 136 päivää ja kaupungissa D 43 päivää.

b) Indeksin pisteluku on 100, kun lumipeitteen kesto on 210 päivää. Indeksiarvot ovat suoraan verrannollisia pysyvän lumipeitteen kestoon, joten esimerkiksi kestoa 146 päivää vastaava indeksiarvo x saadaan yhtälöstä

$$\frac{x}{100} = \frac{146}{210},$$

josta saadaan

$$x = 100 \cdot \frac{146}{210}$$

Lasketaan vastaavalla tavalla indeksiarvot kaupunkien A–D lumipeitteiden keskimääräisille kestoille:

kaupunki	kesto keskimäärin (päiviä)	indeksi
A	156	$\approx \underline{\underline{74}}$
B	156	$\approx \underline{\underline{74}}$
C	136	$\approx \underline{\underline{65}}$
D	43	$\approx \underline{\underline{19}}$

1p (5p)

1p (6p)

11. Eräs dosentti pohti tasokuvioiden pinta-alojen ja piirien suhteita. Hänen mukaansa tasokuviota sanotaan *pulleaksi*, jos sen pinta-ala on suurempi kuin kahdeskymmenesosa sen piirin toisesta potenssista.

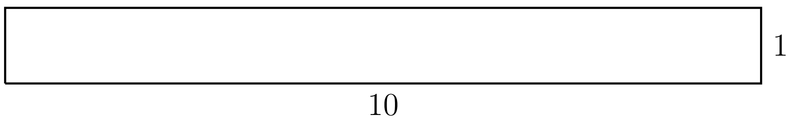
a) Anna kaksi eri esimerkkiä kuvioista, jotka eivät ole pulleita (dosentin määritelmän mukaan).
b) Anna kaksi eri esimerkkiä kuvioista, jotka ovat pulleita (dosentin määritelmän mukaan).

Eri esimerkeiksi lasketaan kuviot, jotka eivät ole yhdenmuotoisia. Muista myös perustella, miksi antamasi esimerkit ovat tai eivät ole pulleita.

Ratkaisu.

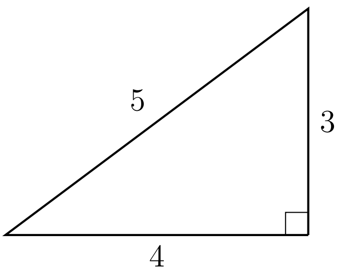
a) 1. Suorakaide, jonka sivujen pituudet ovat 1 ja 10, ei ole määritelmän mukaan pullea. 1p

Sen pinta-ala on $A = 1 \cdot 10 = 10$ ja piirin neliön kahdeskymmenesosa on $\frac{p^2}{20} = \frac{(2\cdot(1+10))^2}{20} = 24{,}2$. Näin ollen $A < \frac{p^2}{20}$. 1p (2p)



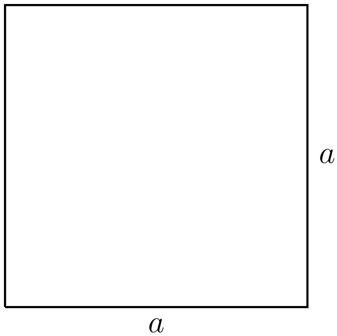
2. Suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 3 ja 4, ei ole määritelmän mukaan pullea. Sen hypotenuusan pituus on $c = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Tällaisen kolmioin pinta-ala on $A = \frac{3\cdot4}{2} = 6$ ja piirin neliön kahdeskymmenesosa on $\frac{(3+4+5)^2}{20} = 7{,}2$. Näin ollen $A < \frac{p^2}{20}$. 1p (3p)



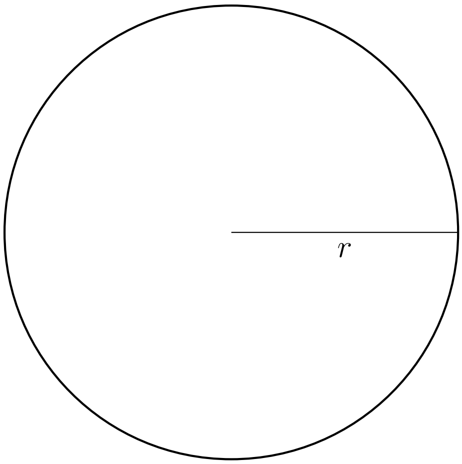
b) 1. Neliö (sivun pituus a) on määritelmän mukaan pullea. 1p (4p)

Sen pinta-ala on $A = a^2$ ja piirin kahdeskymmesosa on $\frac{(4a)^2}{20} = \frac{16}{20}^{(4} a^2 = \frac{4}{5}a^2$. Näin ollen $A > \frac{p^2}{20}$. 1p (5p)



2. Ympyrä (säde r) on määritelmän mukaan pullea.

Sen pinta-ala on $A = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot r^2$ ja piirin kahdeskymmesosa on
$\frac{(2\pi r)^2}{20} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{20} = \frac{\pi^2}{5} \cdot r^2 \approx 1{,}97 \cdot r^2$. Näin ollen $A > \frac{p^2}{20}$. 1p (6p)



12. Moodi ja keskiarvo ovat esimerkkejä jakauman sijaintiluvuista.
   a) Kerro sanallisesti, miten jakauman moodi ja keskiarvo lasketaan.
   b) Anna esimerkki yhdestä jakaumasta, jossa moodi ja keskiarvo ovat yhtä suuret, ja toisesta jakaumasta, jossa ne ovat eri suuret. Muista myös perustella, miksi esimerkeilläsi on vaaditut ominaisuudet.

Ratkaisu.

a) 1. Jakauman moodi on yleisin jakaumassa esiintyvä luku. Moodi määritetään laskemalla jakaumassa esiintyvien lukujen frekvenssit eli esiintymismäärät ja valitsemalla se, jolla on suurin frekvenssi. Jos suurin frekvenssi esiintyy useammalla luvulla, nämä kaikki ovat jakauman moodeja. 1p

2. Jakauman keskiarvo määritetään laskemalla ensin kaikki jakauman luvut yhteen. Tämä summa jaetaan kaikkien jakauman lukujen lukumäärällä. Keskiarvo voidaan laskea myös frekvenssien avulla. Tällöin jokainen jakaumassa esiintyvä luku kerrotaan sen frekvenssillä ja nämä tulot lasketaan yhteen. Saatu summa jaetaan frekvenssien summalla. 2p (3p)

b) 1. Esimerkiksi seuraavassa jakaumassa moodi ja keskiarvo ovat yhtä suuret: 1, 7, 7, 13. 1p (4p)

Jakaumassa lukujen 1 ja 13 frekvenssi on 1 ja luvun 7 frekvenssi on 2. Näin ollen moodi on 7.
Lukujen keskiarvo on

$$\overline{x} = \frac{1 + 2 \cdot 7 + 13}{1 + 2 + 1} = 7.$$

0,5 p (4,5p)

2. Esimerkikssi seuraavassa jakaumassa moodi ja keskiarvo ovat eri suuret: 1, 7, 7, 9. 1p (5,5p)

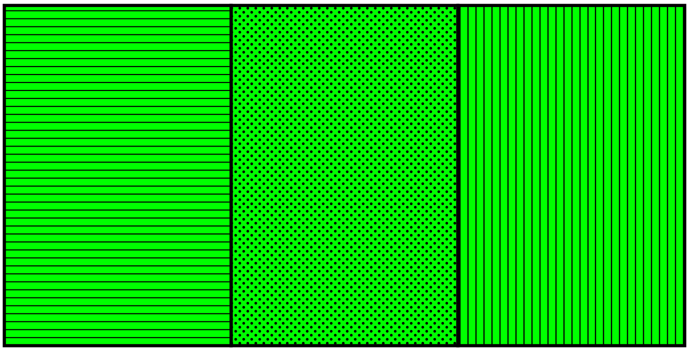
Jakaumassa lukujen 1 ja 9 frekvenssi on 1 ja luvun 7 frekvenssi on 2. Näin ollen moodi on 7.

Lukujen keskiarvo on

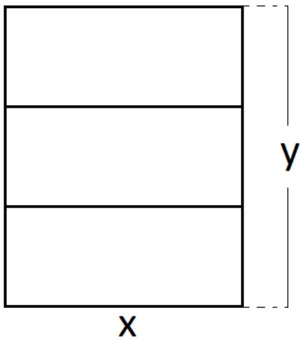
$$\overline{x} = \frac{1 + 2 \cdot 7 + 9}{1 + 2 + 1} = 6,$$

joten jakauman moodi ja keskiarvo ovat eri suuret. 0,5p (6p)

13. Luomuviljelijä on hankkinut materiaalin 400 metrin pituiseen aitaan. Hän aikoo rajata sillä niitystä suorakulmion muotoisen alan, joka lisäksi jaetaan kuvion mukaisesti kolmeen yhtäsuureen osaan kahdella ulkoreunan suuntaisella lisäaidalla. Määritä aitauksen suurin mahdollinen kokonaispinta-ala.



Ratkaisu.



valittu x ja y: 1p

Aitaa on käytettävissä $l = 400\,\mathrm{m}$ ja kuvan merkinnöillä aidan kokonaispituus on $l = 4x + 2y$. Tästä saadaan yhteys x:n ja y:n välille.

$$\begin{aligned} 400 &= 4x + 2y \qquad \| : 2 \\ 2x + y &= 200 \\ y &= 200 - 2x. \end{aligned}$$

1p (2p)

Sivujen pituudet eivät voi olla negatiivisia, joten $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Jälkimmäisestä ehdosta saadaan

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ 200 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -200 \quad \| : (-2) \\ x &\leq 100 \end{aligned}$$

Näin on saatu sivun x pituudelle ala- ja ylärajat $0 \leq x \leq 100$.

Pellon kokonaispinta-ala voidaan laskea leveyden ja pituuden tulona.

$$\begin{aligned} A &= xy \qquad \| \text{sij. } y = 200 - 2x \\ A(x) &= x(200 - 2x) \\ A(x) &= -2x^2 + 200x, \end{aligned}$$

Pinta-alafunktion kuvaaja $y = A(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivoidaan pinta-alafunktio. 1p (4p)

$$A'(x) = -4x + 200$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -4x + 200 &= 0 \\ 4x &= 200 \quad \| : 4 \\ x &= \frac{200}{4} \\ x &= 50 \end{aligned}$$

1p (5p)

Nollakohta on sallitulla välillä $0 \leq x \leq 100$. Lasketaan kysytty pinta-alan suurin arvo.

$$A(50) = -2 \cdot 50^2 + 200 \cdot 50 = 5000\,(\mathrm{m}^2)$$

Vastaus: Pellon suurin mahdollinen pinta-ala on $5000\,\mathrm{m}^2$. 1p (6p)