Lääkiskurssi

- 5-8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa **1.10., 3.11., 7.1., 16.2.** tai **30.3.** Opetusajaksi voi yleensä valita joko 9.30-12.30 tai 13-16 tai 17-20.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta ja pitkällä kurssilla lisäksi 6 yo-koetta
- Pitkä kurssi **16.2.-22.5.** ja kevätkurssi **30.3.-22.5.**

Lyhyt matematiikka, syksy 2014

Mallivastaukset, 24.9.2014

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään he opettavat MAFY:n kursseilla ympäri vuoden ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut tiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen ja Viljami Suominen. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

a) lääketieteellisen valmennuskurssit

a) DI-valmennuskurssit

a) yo-kokeisiin valmentavat kurssit

a) Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Ratkaise yhtälö $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{x-3}{6}$.

b) Laske lausekkeen $\dfrac{x+1}{y-1}+\dfrac{y-1}{x+1}$ arvo, kun $x=\dfrac{1}{2}$ ja $y=\dfrac{3}{2}$.

c) Missä pisteessä suorat $x+5y=1$ ja $x-5y=5$ leikkaavat toisensa?

Ratkaisu.

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{5} &= \frac{x-3}{6} \quad \text{(Kerrotaan ristiin.)}\\
6(x+2) &= 5(x-3)\\
6x+12 &= 5x-15 \quad \text{1p}\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{{}=-27}} \quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}
$$

b)

$$\frac{x+1}{y-1}+\frac{y-1}{x+1}$$

Sijoitetaan $x=\dfrac{1}{2}$ ja $y=\dfrac{3}{2}$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}+\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\\
&= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \text{1p (3p)}\\
&= \frac{3}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}+\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{3}\\
&= 3+\frac{1}{3}\\
&= \underline{\underline{\frac{10}{3}}} \quad \text{1p (4p)}
\end{aligned}
$$

c) Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparista.

$$+\begin{cases} x + \cancel{5y} = 1 \\ x - \cancel{5y} = 5 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \quad \| : 2 \\ x &= 3 \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} 3 + 5y &= 1 \\ 5y &= -2 \quad \| : 5 \\ y &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Vastaus: Leikkauspiste on $\left(3, -\frac{2}{5}\right)$. 1p (6p)

2. Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

a) $2^x = 2$
b) $2^x = \frac{1}{2}$
c) $2^x = 8^2$
d) $3^x = \frac{1}{3^5}$
e) $10^x = 1000$
f) $10^x = 0{,}01$.

Ratkaisu.

a)

$\boxed{\text{Tapa 1}}$

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \\ 2^x &= 2^1 \\ \underline{\underline{x = 1}} & \quad \text{1p} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \quad \| \lg(\quad) \\ \lg(2^x) &= \lg(2) \\ x\lg(2) &= \lg(2) \quad \| : \lg(2) \\ \underline{\underline{x = 1}} & \quad \text{1p} \end{aligned}$$

b)

$\boxed{\text{Tapa 1}}$

$$\begin{aligned} 2^x &= \frac{1}{2} \\ 2^x &= 2^{-1} \\ \underline{\underline{x = -1}} & \quad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

$$
\begin{aligned}
2^x &= \frac{1}{2} \quad \| \lg(\quad) \\
\lg(2^x) &= \lg\left(\frac{1}{2}\right) \\
x\lg(2) &= \lg\left(\frac{1}{2}\right) \quad \| : \lg(2) \\
x &= \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}{\lg(2)} \\
&\underline{\underline{x = -1}} \quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}
$$

c)

$\boxed{\text{Tapa 1}}$

$$
\begin{aligned}
2^x &= 8^2 \\
2^x &= (2^3)^2 \\
2^x &= 2^6 \\
&\underline{\underline{x = 6}} \quad \text{1p (3p)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

$$
\begin{aligned}
2^x &= 8^2 \quad \| \lg(\quad) \\
\lg(2^x) &= \lg\left(8^2\right) \\
x\lg(2) &= \lg\left(8^2\right) \quad \| : \lg(2) \\
x &= \frac{\lg\left(8^2\right)}{\lg(2)} \\
&\underline{\underline{x = 6}} \quad \text{1p (3p)}
\end{aligned}
$$

d)

Tapa 1

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{3^5} \\ 3^x &= 3^{-5} \\ \underline{\underline{x = -5}} & \quad \text{1p (4p)} \end{aligned}$$

Tapa 2

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{3^5} \quad \| \lg(\quad) \\ \lg(3^x) &= \lg\left(\frac{1}{3^5}\right) \\ x\lg(3) &= \lg\left(\frac{1}{3^5}\right) \quad \| : \lg(3) \\ x &= \frac{\lg\left(\frac{1}{3^5}\right)}{\lg(3)} \\ \underline{\underline{x = -5}} & \quad \text{1p (4p)} \end{aligned}$$

e)

Tapa 1

$$\begin{aligned} 10^x &= 1000 \\ 10^x &= 10^3 \\ \underline{\underline{x = 3}} & \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

$$\begin{aligned} 10^x &= 1000 \quad \| \lg(\quad) \\ x &= \lg(1000) \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3}} \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

f)

$\boxed{\text{Tapa 1}}$

$$\begin{aligned} 10^x &= 0{,}01 \\ 10^x &= 10^{-2} \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -2}} \quad \text{1p (6p)} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

$$\begin{aligned} 10^x &= 0{,}01 \quad \| \lg(\quad) \\ x &= \lg(0{,}01) \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -2}} \quad \text{1p (6p)} \end{aligned}$$

3. a) Määritä lausekkeen $(x+1)(2-x)-2$ nollakohdat.
   b) Millä kokonaisluvuilla $-1 \leq n \leq 4$ lauseke n^3-3n+1 saa positiivisia arvoja?
   c) Ympyrän pinta-ala on $520\,\mathrm{cm}^2$. Laske sen halkaisijan pituus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu.

a) Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä.

$$\begin{aligned}
(x+1)(2-x)-2 &= 0 \\
2x - x^2 + \cancel{2} - x - \cancel{2} &= 0 \quad \text{1p} \\
-x^2 + x &= 0 \\
x(-x+1) &= 0 \\
-x+1 &= 0 \quad \text{tai} \quad x = 0 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Vastaus: Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 1$. 1p (2p)

b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$n^3 - 3n + 1 > 0, \quad \text{kun} \ -1 \leq n \leq 4$$

sijoittamalla erikseen kaikki kokonaisluvut väliltä $[-1, 4]$ yhtälöön.

$$\begin{aligned}
&n = -1, && (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 1 = 3 > 0 \\
&n = 0, && 0^3 - 3\cdot 0 + 1 = 1 > 0 \\
&n = 1, && 1^3 - 3\cdot 1 + 1 = -1 < 0 \\
&n = 2, && 2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 3 > 0 \\
&n = 3, && 3^3 - 3\cdot 3 + 1 = 19 > 0 \\
&n = 4, && 4^3 - 3\cdot 4 + 1 = 53 > 0.
\end{aligned}$$

Vastaus: Lauseke saa positiivisia arvoja luvuilla -1, 0, 2, 3 ja 4. 2p (4p)

c) $A = 520\,\text{cm}^2$. Ratkaistaan säde ympyrän pinta-alan kaavasta.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \quad \| : \pi \\ r^2 &= \frac{A}{\pi} \\ r &= \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \\ r &= \sqrt{\frac{520}{\pi}} \end{aligned}$$

1p (5p)

Halkaisija on kaksi kertaa säde:

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{520}{\pi}} \\ &= 25{,}731\ldots \\ &\approx 25{,}7 \quad (\,\text{cm}). \end{aligned}$$

Vastaus: Ympyrän halkaisija on 25,7 cm. 1p (6p)

4. Hammastahnaputkilon tilavuus on 100 ml ja hinta 1,50 €. Putkilon tilavuutta kasvatetaan 25%, mutta samalla myyntihintaa korotetaan 40%. Kuinka monta prosenttia kalliimpaa hammastahna on uudessa putkilossa millilitraa kohden?

Ratkaisu.

Lasketaan hammastahnan hinta millilitraa kohden alussa.

$$\begin{aligned} K_1 &= 1{,}50\,€ \\ V_1 &= 100\,\text{ml} \\ \frac{K_1}{V_1} &= \frac{1{,}50\,€}{100\,\text{ml}} = 0{,}015\,\frac{€}{\text{ml}}. \end{aligned}$$ 1p

Lasketaan uusi hinta millilitraa kohden.

$$\begin{aligned} \frac{K_2}{V_2} &= \frac{1{,}4K_1}{1{,}25V_1} \\ &= \frac{1{,}4 \cdot 1{,}50\,€}{1{,}25 \cdot 100\,\text{ml}} \\ &= 0{,}0168\,\frac{€}{\text{ml}} \end{aligned}$$ 2p (3p)

Lasketaan, kuinka kuinka monta prosenttia kalliimpaa hammastahna uudessa putkilossa on millilitraa kohden.

$$\frac{0{,}0168 - 0{,}015}{0{,}015} = 0{,}12 = 12\%.$$

Vastaus: Hinta on 12% kalliimpaa millilitraa kohden uudessa putkilossa. 3p (6p)

5. Millä muuttujan x arvolla summa $(x-3)^2+(x-9)^2$ on mahdollisimman pieni?

Ratkaisu.

Avataan sulut summan lausekkeesta.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-3)^2+(x-9)^2 \\
f(x) &= x^2-6x+9+(x^2-18x+81) \\
f(x) &= 2x^2-24x+90.
\end{aligned}
$$

$y=f(x)$ on ylöspäin aukeava paraabeli, 1p joten sen pienin arvo on derivaatan nollakohdassa (paraabelin huipussa). 2p (3p)

$$f'(x)=4x-24 \quad \text{1p (4p)}$$

Derivaatan nollakohta:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
4x-24 &= 0 \qquad \text{1p (5p)} \\
4x &= 24 \qquad \| :4 \\
x &= 6.
\end{aligned}
$$

Vastaus: Summan arvo on pienin arvolla $x=6$. 1p (6p)

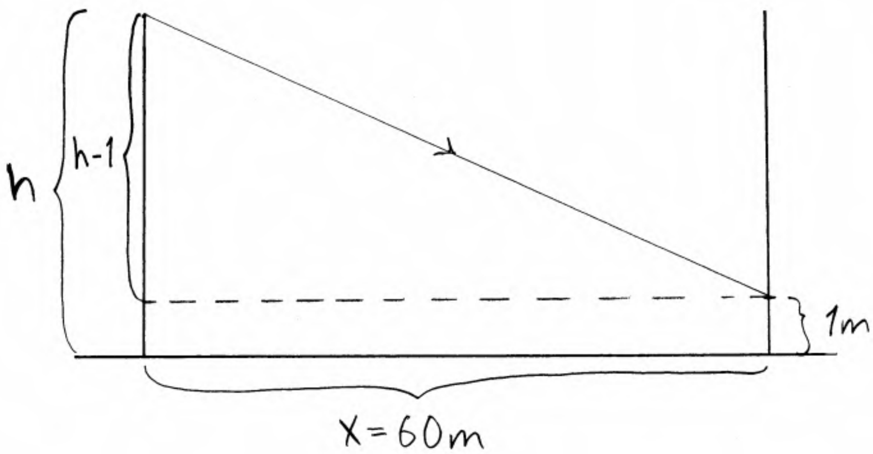
6. Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.

   a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liitää 60 metriä leveän aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.
   b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liitää? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

<http://webbi.meili.fi/kettu/RunotKaunisMetsakauris/Liito_oravaKuvaJaRuno.html>. Luettu 5.3.2013.

Ratkaisu.

a)



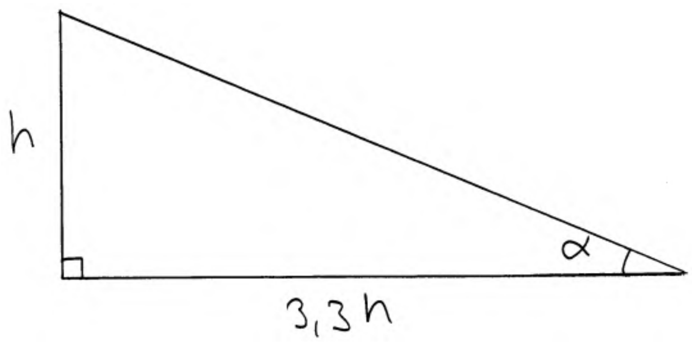
Tehtävänannon mukaan puun korkeudelle (h) ja vaakasuoralle liitomatkalle x

pätee

$$
\begin{aligned}
x &= 3{,}3 \cdot (h-1) \quad \| \text{Sij. } x = 60 \qquad \text{1p} \\
60 &= 3{,}3 \cdot (h-1) \\
3{,}3h - 3{,}3 &= 60 \\
3{,}3h &= 63{,}3 \quad \| : 3{,}3 \quad \text{1p (2p)} \\
h &= 19{,}1818\ldots \\
h &= 19 \quad (\,\mathrm{m}).
\end{aligned}
$$

Vastaus: Liito-oravan täytyy ponnistaa 19 m:n korkeudelta. 1p (3p)

b)

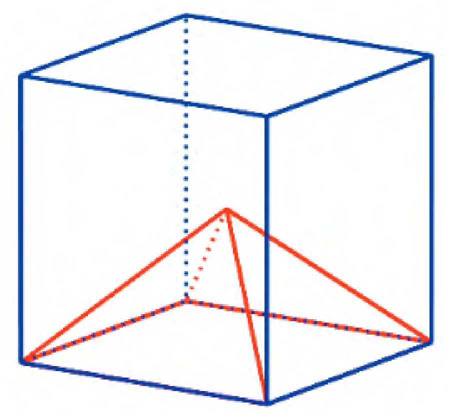


Tehtävänannon mukaan liito-orava liitää kuvan mukaisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan suunnassa. Ratkaistaan α.

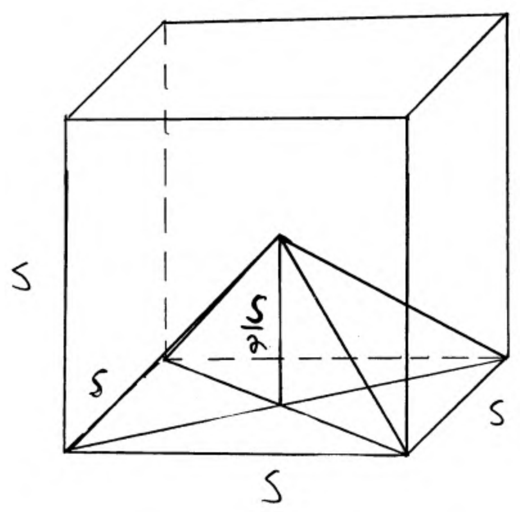
$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{\cancel{h}}{3{,}3\cancel{h}} \\
\tan(\alpha) &= \frac{1}{3{,}3} \qquad \text{2p (5p)} \\
\alpha &= 16{,}858\ldots^\circ \\
\alpha &\approx 17^\circ.
\end{aligned}
$$

Vastaus: Liito-orava liitää 17°:n kulmassa vaakatasoon nähden. 1p (6p)

7. Kuution sisällä on pyramidi, jonka pohja yhtyy kuution pohjaan ja jonka korkeus on puolet kuution särmän pituudesta. Määritä pyramidin ja kuution tilavuuksien suhde. Kuution särmän pituus on s.



Ratkaisu.



Pyramidin tilavuus on

$$V_1 = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}s^2 \cdot \left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{6}s^3. \quad \text{3p}$$

Kuution tilavuus on

$$V_2 = s^3. \quad \text{1p (4p)}$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6}s^3}{s^3} = \frac{1}{6}.$$

Vastaus: Tilavuuksien suhde on $\frac{1}{6}$. 2p (6p)

8. Alla olevassa taulukossa ovat jääkiekon SM-liigan kuuden seuratuimman joukkueen keskimääräiset kotiottelujen katsojaluvut liigakaudelta 2011-2012.

   a) Laske katsojalukujen keskiarvo ja keskihajonta.
   b) Minkä joukkueiden katsojaluvut poikkeavat keskiarvosta enemmän kuin keskihajonnan verran?

Jokerit	9 173
HIFK	8 266
Kärpät	5 821
TPS	5 534
Tappara	5 359
Ilves	5 177

Ratkaisu.

a) Keskiarvo on

$$\overline{x} = \frac{9173 + 8266 + 5821 + 5534 + 5359 + 5177}{6}$$

$$\overline{x} = 6555. \quad \text{1p}$$

Keskihajonta on

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_1 - \overline{x})^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\begin{matrix}(9173 - 6555)^2 + (8266 - 6555)^2 + (5821 - 6555)^2 \ldots \\ \ldots + (5534 - 6555)^2 + (5359 - 6555)^2 + (5177 - 6555)^2\end{matrix}}{6}}$$

$$\begin{aligned} s &= 1564{,}81 \ldots \\ &\approx 1565. \end{aligned}$$

Vastaus: Keskiarvo oli 6555 ja keskihajonta 1565. 2p (3p)

b) Lasketaan poikkeamat.

Jokerit:	$9173 - 6555 = 2618$
HIFK:	$8266 - 6555 = 1711$
Kärpät:	$5821 - 6555 = -734$
TPS:	$5534 - 6555 = -1021$
Tappara:	$5359 - 6555 = -1196$
Ilves:	$5177 - 6555 = -1378$ 2p (5p)

Vastaus: Jokerien ja HIFK:n katsojaluvut poikkesivat keskiarvosta enemmän kuin yhden keskihajonnan. 1p (6p)

9. Painonhallintaa varten kehitetty painoindeksi I on laskettu kaavalla $I = \dfrac{m}{h^2}$ jo 1830-luvulta lähtien. Kaavassa henkilön massan m yksikkönä on kilogramma ja pituuden h yksikkönä metri. Vuonna 2013 Nick Trefethen Oxfordin yliopistosta ehdotti uutta indeksiä J, joka lasketaan kaavalla $J = \dfrac{1{,}3m}{h^{2{,}5}}$.

   a) Raimo on 193 cm pitkä ja painaa 102 kg. Laske hänen painoindeksinsä I ja J yhden desimaalin tarkkuudella.

   b) Hannan pituus on 160 cm ja hänen I-indeksinsä on 25. Laske hänen J-indeksinsä.

   c) Kuinka pitkän henkilön painoindeksit I ja J ovat yhtä suuret?

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} h_1 &= 1{,}93\,\mathrm{m} \\ m_1 &= 102\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

Lasketaan painoindeksit.

$$\begin{aligned} I &= \frac{m_1}{h_1^2} \\ &= \frac{102}{1{,}93^2} \\ &= 27{,}383\ldots \\ &\approx 27{,}4. \qquad \text{1p} \\ J &= \frac{1{,}3m_1}{h_1^{2{,}5}} \\ &= 25{,}624\ldots \\ &\approx 25{,}6. \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{I = 27{,}4 \text{ ja } J = 25{,}6.}}$ 1p (2p)

b)

$$\begin{aligned} h_2 &= 1{,}6\,\mathrm{m} \\ I_2 &= 25. \end{aligned}$$

Ratkaistaan Hannan massa yhtälöstä.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{m_2}{h_2^2} \\ m_2 &= I_2 h_2^2 \\ m_2 &= 25 \cdot 1{,}6^2 \\ m_2 &= 64 \quad (\,\mathrm{kg}) \qquad \text{1p (3p)} \end{aligned}$$

Lasketaan J-indeksi.

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1{,}3 \cdot 64}{1{,}6^{2{,}5}} \\ &= 25{,}693\ldots \\ &\approx 26. \end{aligned}$$

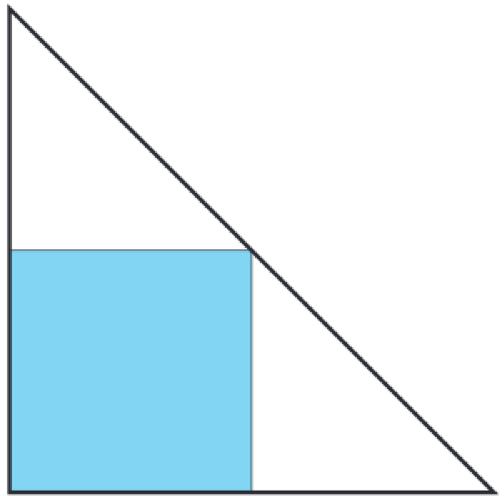
Vastaus: $\underline{\underline{J\text{-indeksi on 26.}}}$ 1p (4p)

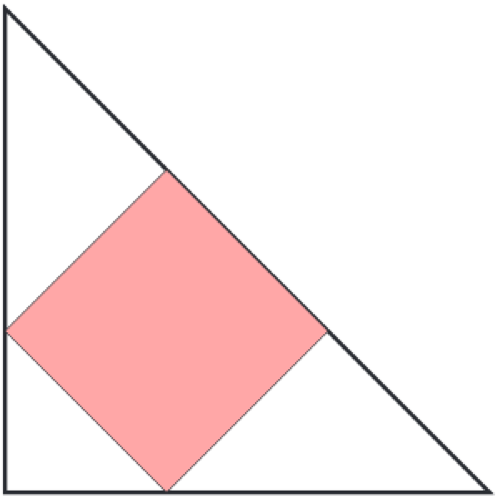
c) Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} I &= J \\ \frac{m}{h^2} &= \frac{1{,}3m}{h^{2{,}5}} \quad \| : m, \quad h > 0 \\ \frac{1}{h^2} &= \frac{1{,}3}{h^{2{,}5}} \quad \| \cdot h^{2{,}5} \\ \frac{h^{2{,}5}}{h^2} &= 1{,}3 \\ h^{2{,}5-2} &= 1{,}3 \\ h^{0{,}5} &= 1{,}3 \quad \|(\quad)^2 \qquad \text{1p (5p)} \\ h &= 1{,}3^2 \\ h &= 1{,}69 \quad (\,\mathrm{m}). \end{aligned}$$

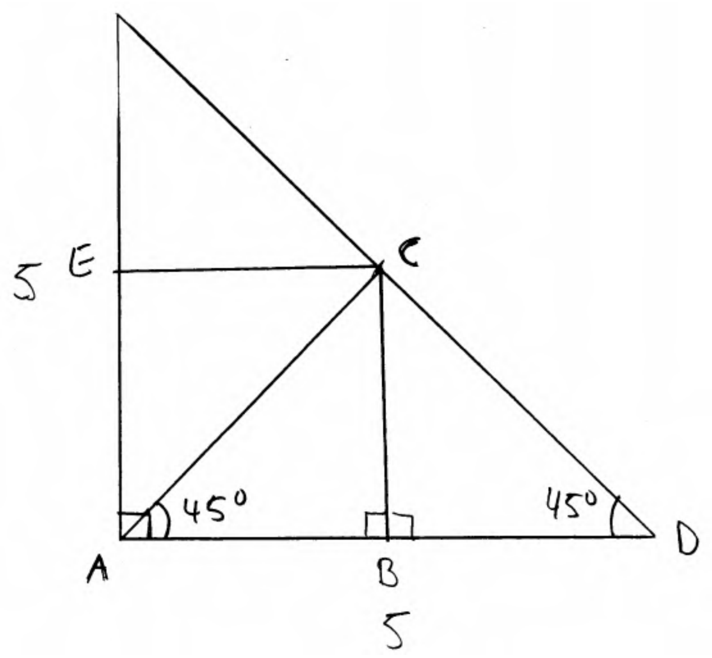
Vastaus: $\underline{\underline{\text{Painoindeksit ovat samat 1,69 m:n pituisella henkilöllä.}}}$ 1p (6p)

10. Suorakulmaisen kolmion kummankin kateetin pituus on 5. Sen sisään on piirretty neliö kahdella eri tavalla kuvioiden mukaisesti. Kumman neliön pinta-ala on suurempi?





Ratkaisu.

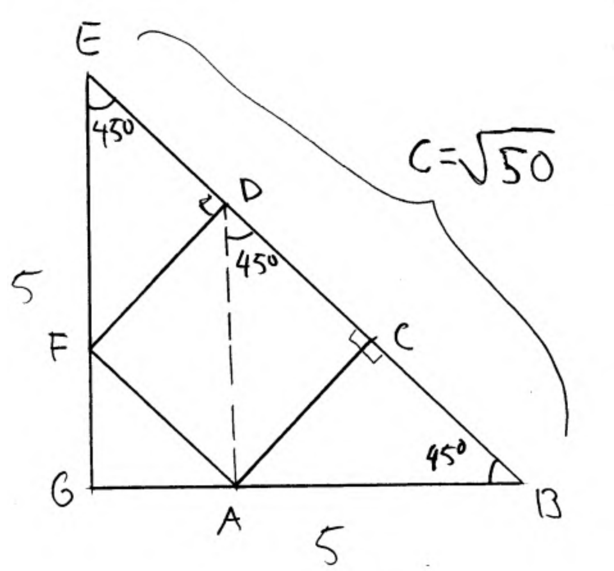


Kolmiot ABC ja DBC ovat yhdenmuotoiset (kk). Lisäksi ne ovat samankokoiset, sillä niillä on yhteinen vastinsivu BC. Janat AB ja DB ovat siten yhtä pitkät.

Neliön $ABCE$ sivun pituus $|AB|$ on näin ollen

$$\begin{aligned} 2|AB| &= 5 \quad \| :2 \\ |AB| &= 2{,}5. \end{aligned}$$ 1p

Neliön pinta-ala on $A_1 = 2{,}5^2 = 6{,}25$.



$\sphericalangle D = 45°$. (samankohtainen kulma $\sphericalangle E$:n kanssa.) Kolmiot ABC, ADC ja DEF ovat yhdenmuotoiset (kk). Lisäksi ne ovat samankokoiset (kolmioilla ABC ja ADC on yhteinen vastinsivu AC). Kolmiot FED ja ABC ovat samankokoiset symmetrian nojalla. Janat ED, DC ja CB ovat siis yhtäpitkät. | Kolmion GBE hypotenuusan pituus saadaan Pythagoraan lauseella. 1p (2p)

$$\begin{aligned} c^2 &= 5^2 + 5^2 \\ c &= \underset{(-)}{\pm} \sqrt{50}. \end{aligned}$$ 1p (3p)

Neliön $ACDF$ sivun pituus ($|DC|$) on täten

$$\begin{aligned} 3 \cdot |DC| &= \sqrt{50} \quad \| :3 \\ |DC| &= \frac{\sqrt{50}}{3}. \end{aligned}$$ 1p (4p)

Neliön pinta-ala on

$$A_2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} = 5{,}555\ldots$$

Vastaus: Sinisen (vasemman) neliön pinta-ala on suurempi. 2p (6p)

11. Taikinasta leivotaan pallonmuotoisia munkkeja, joiden pinta sokeroidaan. Tarvittavan sokerin määrä on suoraan verrannollinen pallon pinta-alaan. Vaihtoehtona on leipoa 24 pientä tai 3 iso munkkia. Laske sokerin kokonaismäärien suhde näille kahdelle vaihtoehdolle.

Ratkaisu.

Olkoon taikinan tilavuus V. Pienten munkkien tapauksessa yhden munkin tilavuus on

$$V_p = \frac{V}{24}.$$

Lasketaan yhden pienen munkin säde.

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{4}{3}\pi r_1^3 \\
\frac{V}{24} &= \frac{4}{3}\pi r_1^3 \quad \| \cdot \frac{3}{4\pi} \\
r_1^3 &= \frac{V}{32\pi} \\
r_1 &= \sqrt[3]{\frac{V}{32\pi}}. \quad \text{1p}
\end{aligned}$$

Yhden munkin pinta-ala on

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4\pi r_1^2 \\
&= 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{32\pi}}\right)^2 \\
&= 4\pi \left(\frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= 4\pi \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}$$

Yhden suuren munkin tilavuus on $V_s = \dfrac{V}{3}$. Suuren munkin säde:

$$\begin{aligned}
\frac{V}{3} &= \frac{4}{3}\pi r_2^3 \quad \| \cdot \frac{3}{4\pi} \\
r_2^3 &= \frac{V}{4\pi} \\
r_2 &= \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}. \quad \text{1p (3p)}
\end{aligned}$$

Yhden suuren munkin pinta-ala on

$$\begin{aligned}
A_2 &= 4\pi r_2^2 \\
&= 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}\right)^2 \\
&= 4\pi \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= 4\pi \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad \text{1p (4p)}
\end{aligned}$$

Lasketaan kokonaispinta-alojen suhde.

$$\begin{aligned}
\frac{A_p}{A_s} &= \frac{24A_1}{3A_2} \\
&= \frac{24 \overset{1}{\cancel{4\pi}} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{4\pi}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Vastaus: Pinta-alojen suhde on 2. 2p (6p)

12. Yhdistyneet kansakunnat asetti vuosituhannen vaihteessa yhdeksi tavoitteekseen, että maailman hiilidioksidipäästöt olisivat vuonna 2015 merkittävästi pienemmät kuin vuonna 1990. Tavoite ei näytä toteutuvan, sillä vuosina 1990 - 2008 päästöjen määrä kasvoi 39%. Oletetaan, että päästöjen vuotuinen kasvuprosentti on ollut aikavälillä 1990 - 2008 vakio. Kuinka monta prosenttia päästöt kasvavat yhteensä vuosina 1990 - 2015, jos niiden vuotuinen kasvuprosentti pysyy edelleen samana? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.

Ratkaisu.

Tehtävänannon oletuksena on, että päästöjen kasvu noudattaa kaavaa

$$P_n = q^n P_0,$$

1p

missä q on vuotuinen korkokerroin ja P_0 päästöjen määrä vuonna 1990. Tiedetään, että vuonna 2008 ($n = 18$) päästöt ovat kasvaneet 39% vuodesta 1990, joten

$$\begin{aligned} P_{18} &= 1{,}39 P_0 \quad \text{1p (2p)} \\ q^{18} P_0 &= 1{,}39 P_0 \quad \| : P_0 \quad \text{1p (3p)} \\ q^{18} &= 1{,}39 \\ q &= \underset{(-)}{+} \sqrt[18]{1{,}39} \\ q &= 1{,}0184\ldots \quad \text{1p (4p)} \end{aligned}$$

Lasketaan päästöjen määrä vuonna 2015.

$$\begin{aligned} n &= 25 \\ P_{25} &= q^{25} P_0 \\ &= 1{,}0184\ldots^{25} \cdot P_0 \\ &= 1{,}5799\ldots P_0 \\ &\approx 1{,}58 P_0. \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Päästöt kasvavat 58% vuosien 1990 - 2015 välisenä aikana. 1p (6p)

13. a) Epäyhtälöt $x+3y \leq 18$, $3x+2y \leq 19$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määrittelevät nelikulmion N. Piirrä sen kuva xy-koordinaatistossa ja laske kärkien koordinaatit.
b) Määritä lausekkeen $2x + y$ suurin ja pienen arvo nelikulmiossa N.

Ratkaisu.

a) Määritetään epäyhtälöiden rajaaman alueen rajasuorat.

$$x + 3y \leq 18.$$

Rajasuora on

$$\begin{aligned} x + 3y &= 18 \\ 3y &= -x + 18 \quad \| :3 \\ y &= -\frac{1}{3}x + 6. \end{aligned}$$

$$3x + 2y \leq 19$$

Rajasuora on

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 19 \\ 2y &= -3x + 19 \quad \| :2 \\ y &= -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

Rajasuora on

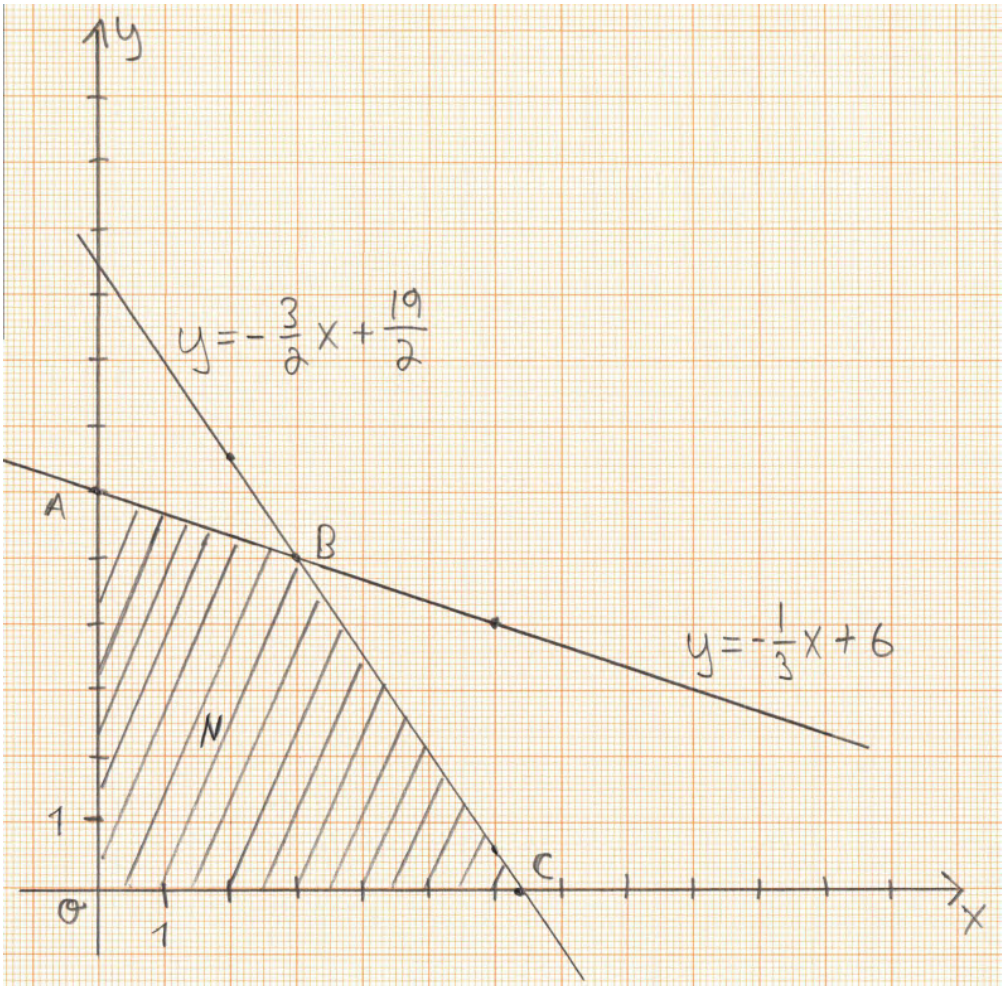
$$x = 0.$$

$$y \geq 0$$

Rajasuora on

$$y = 0.$$

Piirretään alue koordinaatistoon.



1p

Lasketaan nelikulmion kärkipisteet. $O = (0, 0)$ (origo).

Piste A:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + 6 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 6 = 6$$
$$A = (0, 6).$$

Piste C:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{19}{2} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2} \\
\frac{3}{2}x &= \frac{19}{2} \quad \| \cdot \frac{2}{3} \\
x &= \frac{19}{3} \\
C &= \left(\frac{19}{3}, 0\right).
\end{aligned}
$$

Piste B:

$$
\begin{cases} x + 3y = 18 & \| \cdot (-3) \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
+\begin{cases} -\cancel{3x} - 9y = -54 \\ \cancel{3x} + 2y = 19 \end{cases} & \\
\hline
-7y &= -35 \quad \| : (-7) \\
y &= 5
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $y = 5$ yhtälöön (1).

$$
\begin{aligned}
x + 3 \cdot 5 &= 18 \\
x &= 3 \\
B &= (3, 5).
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kärkien koordinaatit ovat $(0, 0)$, $(0, 6)$, $(3, 5)$ ja $\left(\frac{19}{3}, 0\right)$. 2p (3p)

b) Lausekkeen $c = 2x + y$ suurin ja pienin arvo nelikulmiossa N löytyvät sen kärkipisteistä. 1p (4p) Lasketaan arvot.

O: $c = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \leftarrow$ pienin
A: $c = 2 \cdot 0 + 6 = 6$
B: $c = 2 \cdot 3 + 5 = 11$
C: $c = 2 \cdot \frac{19}{3} + 0 = \frac{38}{3} = 12{,}666\ldots \leftarrow$ suurin 1p (5p)

Vastaus: Pienin arvo on 0 ja suurin arvo on $\frac{38}{3}$. 1p (6p)

14. Kristian aikoo vaihtaa autoa ja hakee pankilta 8000 euron lainaa. Pankki tarjoaa hänelle tasaerälainaa, joka maksetaan takaisin kahdessa vuodessa. Lainan vuotuinen korko on 6,6% koko takaisinmaksukauden ajan. Muita kuluja ei oteta huomioon.

a) Määritä lainan kuukausittaisen tasaerän suuruus.
b) Kuinka paljon lainaa on jäljellä silloin, kun puolet takaisinmaksuajasta on kulunut?
c) Kuinka paljon korkoa Kristian maksaa yhteensä koko kahden vuoden laina-aikana?

Ratkaisu.

$$K = 8000\,€.$$

Laina-aika on 2 vuotta. Maksueriä on $2 \cdot 12 = 24$. Vuosikorko on 6,6%. Kuukauden korko on

$$\frac{6{,}6\%}{12} = 0{,}55\% \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}55.$$

Kuukausittainen korkokerroin on

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{0{,}55}{100} = 1{,}0055.$$

a) Lasketaan tasaerän (A) suuruus.

$$A = Kq^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \qquad \text{1p}$$

$$A = 8000 \cdot 1{,}0055^{24} \cdot \frac{1-1{,}0055}{1-1{,}0055^24}$$

$$= 356{,}731\ldots$$

$$\approx 356{,}73 \quad (€)$$

Vastaus: Tasaerän suuruus on 356,73 €. 1p (2p)

b) Kun takaisinmaksuajasta on kulunut puolet, on maksueriä ollut $k = 12$ kappaletta. Lasketaan jäljellä oleva lainamäärä.

$$V_k = Kq^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \quad \text{1p (3p)}$$

$$\begin{aligned} V_{12} &= 8000 \cdot 1{,}0055^{12} - 356{,}73 \cdot \frac{1-1{,}0055^{12}}{1-1{,}0055} \\ &= 4131{,}611 \\ &\approx 4131{,}61 \quad (\text{€}). \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Lainaa on jäljellä 4131,61 €.}}}$ 1p (4p)

c) Lasketaan tasaerien summa koko laina-aikana.

$$K_S = 24 \cdot A = 24 \cdot 356{,}73 = 8561{,}52 \quad (\text{€}). \quad \text{1p (5p)}$$

Korkoa maksetaan

$$8561{,}52\,\text{€} - 8000\,\text{€} = 561{,}52\,\text{€}.$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kristian maksaa korkoa yhteensä 561,52 €.}}}$ 1p (6p)

15. Jonna ampuu uudenvuodenraketin katolta koordinaatiston pisteestä $(20, 10, 5)$ vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$ suuntaan. Raketti lentää suoraviivaisesti 105 metriä, kunnes se räjähtää. Koordinaatiston yksikkönä on metri.
   a) Missä pisteessä raketti räjähtää?
   b) Kuinka kaukana koordinaatiston origossa seisovista katsojista räjähdyspiste on?

Ratkaisu.

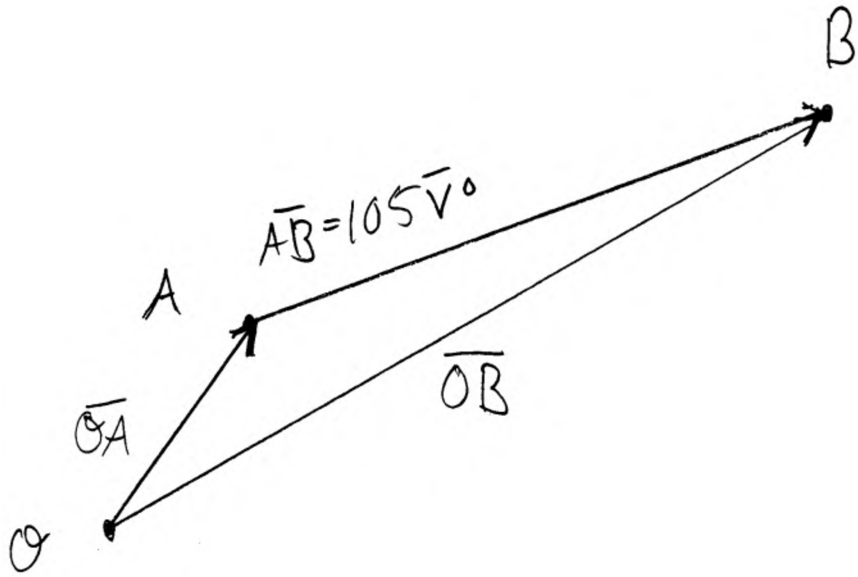
a) Raketti lähtee pisteestä $A = (20, 10, 5)$. Määritetään vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$ suuntainen yksikkövektori.

$$\overline{v}^0 = \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$$

Lasketaan vektorin $\overline{v}$ pituus.

$$|\overline{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7 \quad \text{1p}$$
$$\overline{v}^0 = \frac{2}{7}\overline{i} - \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}. \quad \text{1p (2p)}$$

Raketin lennettyä 105 m se on pisteessä B. Määritetään paikkavektori $\overline{OB}$.



$$\begin{aligned}
\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\
&= \overline{OA} + 105\overline{v}^0 \\
&= 20\overline{i} + 10\overline{j} + 5\overline{k} + 105\left(\frac{2}{7}\overline{i} - \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}\right) \\
&= 50\overline{i} - 35\overline{j} + 95\overline{k} \\
B &= (50, -35, 95).
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Raketti räjähtää pisteessä } (50, -35, 95).}}$ 1p (3p)

b) Etäisyys origosta on paikkavektorin $\overline{OB}$ pituus.

$$\begin{aligned}
|\overline{OB}| &= \sqrt{50^2 + (-35)^2 + 95^2} \quad \text{1p (4p)} \\
&= 112{,}915\ldots \\
&\approx 110 \quad (\,\mathrm{m})
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Raketti räjähtää 110 m:n päässä katsojista.}}}$ 2p (6p)