YO-MALLIVASTAUKSET

LYHYT MATEMATIIKKA

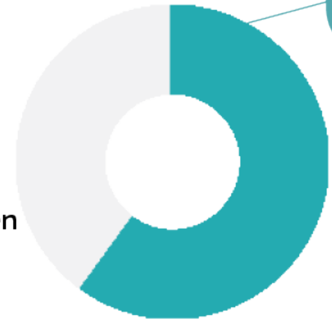
KEVÄT 2020

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2019 haussa

60%

kaikista lääketieteellisten opiskelupaikoista.



60 %

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Timo Kalinainen, Katja Niemistö ja Jori Suominen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

KÄYTTÖEHDOT

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

1. Sievennys (12 p.)

Poista sulut ja sievennä lausekkeet.
Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten toinen potenssi x^2 kirjoitetaan vastauslaatikkoon muodossa x^2. Kunkin vastauksen maksimipituus on 30 merkkiä.

1.1. Poista sulut ja sievennä lauseke $5y - (3y - 1)$. (2 p.)

1.2. Poista sulut ja sievennä lauseke $6(2x - 8)$. (2 p.)

1.3. Poista sulut ja sievennä lauseke $(x + 4)(x - 4)$. (2 p.)

1.4. Poista sulut ja sievennä lauseke $(4x - 2)^2$. (2 p.)

1.5. Poista sulut ja sievennä lauseke $\frac{9(xy)^2}{-3x}$. (2 p.)

1.6. Poista sulut ja sievennä lauseke $2x(3x - y) - (2y + 2x)(x - 3y)$. (2 p.)

Ratkaisu.

1.1. $2y + 1$ 2p (yht. 2p)

1.2. $12x - 48$ 2p (yht. 4p)

1.3. x^2 $- 16$ 2p (yht. 6p)

1.4. $16x$^2 $- 16x + 4$ 2p (yht. 8p)

1.5. $-3xy$^2 2p (yht. 10p)

1.6. $4x$^2 $+ 2xy + 6y$^2 2p (yht. 12p)

1.

$$\begin{aligned} 5y - (3y - 1) &= 5y - 3y + 1 \\ &= 2y + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 6(2x-8) &= 6 \cdot 2x - 6 \cdot 8 \\ &= 12x - 48 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (x+4)(x-4) &= x \cdot x + x \cdot (-4) + 4 \cdot x + 4 \cdot (-4) \\ &= x^2 - 4x + 4x - 16 \\ &= x^2 - 16 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (4x-2)^2 &= (4x-2) \cdot (4x-2) \\ &= 4x \cdot 4x + 4x \cdot (-2) - 2 \cdot 4x - 2 \cdot (-2) \\ &= 16x^2 - 8x - 8x + 4 \\ &= 16x^2 - 16x + 4 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{9(xy)^2}{-3x} &= \frac{9x^2y^2}{-3x} \\ &= \frac{9}{-3}\frac{x^2y^2}{x} \\ &= -3 \cdot xy^2 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} 2x(3x-y) - (2y+2x)(x-3y) &= 6x^2 - 2xy - \left(2xy - 6y^2 + 2x^2 - 6xy\right) \\ &= 6x^2 - 2xy - 2xy + 6y^2 - 2x^2 + 6xy \\ &= 4x^2 + 2xy + 6y^2 \end{aligned}$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2. Murtoluvut (12 p.)

Laske alla olevat murtolukulaskut kohdissa 2.1.–2.4. ja ratkaise yhtälö kohdassa 2.5. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten murtoluku $\frac{x}{y}$ kirjoitetaan muodossa x/y. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä.

Vain tarkka arvo käy vastaukseksi.

2.1. Laske murtolukulasku $1\frac{7}{15} - \frac{9}{15}$. (2 p.)

2.2. Laske murtolukulasku $\frac{3}{7} + \frac{1}{3}$. (2 p.)

2.3. Laske murtolukulasku $\frac{1}{4} \cdot 3\frac{2}{7}$. (2 p.)

2.4. Laske murtolukulasku $\frac{3}{8} : \frac{6}{11}$. (2 p.)

2.5. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}$. (4 p.)

Ratkaisu.

2.1. $13/15$ 2p (yht. 2p)

2.2. $16/21$ 2p (yht. 4p)

2.3. $23/28$ 2p (yht. 6p)

2.4. $11/16$ 2p (yht. 8p)

2.5. $-5/8$ 4p (yht. 12p)

1.

$$\begin{aligned}
1\frac{7}{15} - \frac{9}{15} &= \frac{15+7}{15} - \frac{9}{15} \\
&= \frac{22}{15} - \frac{9}{15} \\
&= \frac{22-9}{15} \\
&= \frac{13}{15}
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{7}+\frac{1}{3} &= {}^{3)}\frac{3}{7}+{}^{7)}\frac{1}{3} \\
&= \frac{3\cdot 3}{3\cdot 7}+\frac{7\cdot 1}{7\cdot 3} \\
&= \frac{9}{21}+\frac{7}{21} \\
&= \frac{9+7}{21} \\
&= \frac{16}{21}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\cdot 3\frac{2}{7} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot 7+2}{7} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{23}{7} \\
&= \frac{1\cdot 23}{4\cdot 7} \\
&= \frac{23}{28}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{8}:\frac{6}{11} &= \frac{3}{8}\cdot\frac{11}{6} \\
&= \frac{3\cdot 11}{8\cdot 6} \\
&= \frac{33}{48} \\
&= \frac{\cancel{3}\cdot 11}{\cancel{3}\cdot 16} \\
&= \frac{11}{16}
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} &= \frac{1}{5}x + \frac{1}{6} \\
{}^{5)}\frac{1}{3}x - {}^{3)}\frac{1}{5}x &= {}^{4)}\frac{1}{6} - {}^{6)}\frac{1}{4} \\
\frac{5}{15}x - \frac{3}{15}x &= \frac{4}{24} - \frac{6}{24} \\
\frac{2}{15}x &= -\frac{2}{24} \qquad \Vert : \frac{2}{15} \\
x &= -\frac{2}{24} : \frac{2}{15} \\
x &= -\frac{2}{24} \cdot \frac{15}{2} \\
x &= -\frac{30}{48} \\
x &= -\frac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6} \cdot 8} \\
x &= -\frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

3. Mallien luokittelu (12 p.)

Alla on esitetty kuusi mallia. Merkitse kunkin lausekkeen osalta, kuvaako se suoraan verrannollista tai kääntäen verrannollista riippuvuutta. Valitse lisäksi, onko kyseessä polynominen tai eksponentiaalinen malli. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Vastauksia ei tarvitse perustella.

Lauseke	Riippuvuus	Mallin tyyppi
$\frac{3}{y}$		
$2^{x-0,6}$		
$\frac{4t-2}{3}$		
x^2+3x-1		
$7t+3t$		
$\frac{4x+2}{2x^2+x}$		

Ratkaisu.

Lauseke	Riippuvuus	Mallin tyyppi
$\frac{3}{y}$	kääntäen verrannollinen	ei kumpikaan
$2^{x-0,6}$	ei kumpikaan	eksponentiaalinen
$\frac{4t-2}{3}$	ei kumpikaan	polynominen
x^2+3x-1	ei kumpikaan	polynominen
$7t+3t$	suoraan verrannollinen	polynominen
$\frac{4x+2}{2x^2+x}$	kääntäen verrannollinen	ei kumpikaan

Pisteytys: jokainen kohta 1p.

Perustelut:

Suoraan verrannollista riippuvuutta kuvaavat lausekkeet ovat muotoa ax ja kääntäen verrannollista riippuvuutta kuvaavat lausekkeet ovat muotoa $\frac{a}{x}$. Polynomista mallia kuvaavat lausekkeet ovat muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ja eksponentiaalista mallia kuvaavat lausekkeet ovat muotoa ab^x, joissa muuttujana on x ja muut tuntemattomat ovat vakioita.

1. Lauseke $\dfrac{3}{y}$ kuvaa selvästi kääntäen verrannollista riippuvuutta. Se on rationaalilauseke, joka ei sievene polynomilausekkeeksi, joten se ei kuvaa eksponentiaalista eikä polynomista mallia.

2. Lauseke

$$2^{x-0{,}6} = \frac{2^x}{2^{0{,}6}} = \frac{1}{2^{0{,}6}} \cdot 2^x$$

kuvaa eksponentiaalista mallia. Koska muuttuja on eksponentissa, se ei kuvaa suoraan eikä kääntäen verrannollista riippuvuutta.

3. Lauseke

$$\frac{4t-2}{3} = \frac{4}{3}t - \frac{2}{3}$$

on ensimmäisen asteen polynomi ja kuvaa siis polynomista mallia. Vakioterminsä takia se ei kuitenkaan kuvaa suoraan verrannollisuutta.

4. Lauseke $x^2 + 3x - 1$ on toisen asteen polynomi ja kuvaa siis polynomista mallia. Se ei kuvaa suoraan verrannollisuutta, joka on aina ensimmäisen asteen polynomi eikä kääntäen verrannollisuutta, joka ei ole polynomi lainkaan.

5. Lauseke

$$7t + 3t = 10t$$

on ensimmäisen asteen polynomi ja kuvaa siten polynomista riippuvuutta. Koska sen vakiotermi on 0, se kuvaa myös lineaarista riippuvuutta.

6. Lauseke

$$\frac{4x+2}{2x^2+x} = \frac{2(2x+1)}{x(2x+1)} = \frac{2}{x}$$

kuvaa kääntäen verrannollista riippuvuutta. Se on rationaalilauseke, joka ei sievene polynomilausekkeeksi, joten se ei kuvaa eksponentiaalista eikä polynomista mallia.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

4. Nations League (12 p.)

Nations League -jalkapalloturnaus järjestettiin ensimmäisen kerran vuonna 2018. Turnauksessa pelataan seuraavien sääntöjen mukaan:

- Joukkueet on jaettu neljään liigaan: A, B, C ja D.
- Molemmissa liigoissa A ja B on 12 joukkuetta, jotka on jaettu neljään kolmen joukkueen lohkoon.
- Molemmissa liigoissa C ja D on 15 joukkuetta, jotka on jaettu yhteen kolmen joukkueen ja kolmeen neljän joukkueen lohkoon.
- Jokaisessa lohkossa kukin joukkue pelaa lohkon kaikkia muita joukkueita vastaan kaksi kertaa: yhden kotipelin ja yhden vieraspelin.
- Liigan A neljä lohkovoittajaa pelaavat lopputurnauksen, jossa on kaksi välierä-ottelua, yksi pronssiottelu sekä loppuottelu.

Kuinka monta ottelua pelataan yhdessä Nations League -turnauksessa?

Ratkaisu.

OSA 1, RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Koska jokaisessa lohkossa jokainen joukkue pelaa jokaista toista joukkuetta vastaan yhden kotipelin, otteluiden määrä lohkossa, jossa on n joukkuetta, on

$$(n-1)n,$$

sillä jokainen joukkue pelaa $n-1$ kotipeliä ja joukkueita on n kappaletta.

Kolmen joukkueen lohkossa pelataan siis

$$2 \cdot 3 = 6$$

ottelua. 3p (yht. 3p) Neljä joukkueen lohkossa pelataan

$$3 \cdot 4 = 12$$

ottelua. 3p (yht. 6p)

Ratkaisussa ei tarvitse keksiä yleistä kaavaa mille tahansa joukkueiden lukumäärälle, vaan riittää selvittää vain tehtävässä kysytyt kolmen ja neljän joukkueen lohkojen otteluiden lukumäärät.

Ratkaisu jatkuu alempana.

OSA 1, RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Jos lohkossa on n joukkuetta, ensimmäinen joukkue pelaa $2(n-1)$ ottelua, koska kyseinen joukkue pelaa kaikkia muita joukkueita, joita on $n-1$ kappaletta, vastaan kaksi ottelua. Sitten toinen joukkue pelaa loppuja joukkueita vastaan vastaavasti $2(n-2)$ ottelua ja niin edelleen. Yhteensä siis pelataan

$$2(n-1)+2(n-2)+\ldots+2\cdot 1$$

ottelua. Siis kolmen joukkueen lohkossa pelataan

$$2\cdot 2+2\cdot 1=6$$

ottelua 3p (yht. 3p) ja neljän joukkueen lohkossa pelataan

$$2\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 1=12$$

ottelua. 3p (yht. 6p)

Ratkaisussa ei tarvitse keksiä yleistä kaavaa mille tahansa joukkueiden lukumäärälle, vaan riittää selvittää vain tehtävässä kysytyt kolmen ja neljän joukkueen lohkojen ottelujen lukumäärät.

OSA 2, RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Liigan A jokaisessa neljässä lohkossa on 3 joukkuetta. Yhteensä liigassa A pelataan

$$4\cdot 6=24$$

ottelua. 1p (yht. 7p)

Liigassa B pelataan samaten 24 ottelua. 1p (yht. 8p)

Liigassa C on yhdessä lohkossa 3 pelaajaa ja kolmessa 4, joten yhteensä otteluita on liigassa C

$$6+3\cdot 12=42.$$ 1p (yht. 9p)

Liigassa D pelataan samaten 42 ottelua. 1p (yht. 10p)

Yhteensä kaikissa liigoissa otteluita on siis

$$2\cdot 24+2\cdot 42=132.$$ 1p (yht. 11p)

Lisäksi lopputurnauksessa on neljä ottelua, joten koko turnauksessa on yhteensä

$$132+4=136$$

ottelua. 1p (yht. 12p)

Vastaus: 136 ottelua

OSA 2, RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Kolmen joukkueen lohkoja on 4 A- ja B-liigoissa ja 1 C- ja D-liigoissa. 1p (yht. 7p)

Neljän joukkueen lohkoja ei ole lainkaan A- ja B-liigoissa ja niitä on C- ja D-liigoissa 3. 1p (yht. 8p)

Yhteensä kolmen joukkueen lohkoja on siis $2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 10$ ja neljän joukkueen lohkoja on yhteensä $2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$. 1p (yht. 9p)

Alkukarsinnoissa pelataan siis yhteensä

$$10 \cdot 6 + 6 \cdot 12 = 132$$

ottelua. 1p (yht. 10p)

Lisäksi lopputurnauksessa on neljä ottelua, 1p (yht. 11p) joten koko turnauksessa on yhteensä

$$132 + 4 = 136$$

ottelua. 1p (yht. 12p)

Vastaus: 136 ottelua

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

5. Times Square (12 p.)

Aineisto:

5.A Teksti: Times Square

Arvioi tekstin 5.A tietojen perusteella, kuinka monta ihmistä pitäisi olla neliömetrillä, jos juhlijoita todellakin olisi kaksi miljoonaa. Laske, kuinka monta neliösenttimetriä maata kullakin kahdella miljoonalla ihmisellä olisi keskimäärin jalkojensa alla, jos juhlijoita olisi kaksi miljoonaa. Arvioi myös, onko tämä enemmän vai vähemmän kuin aikuisen ihmisen jalkapohjien pinta-ala.

Ratkaisu.

Lasketaan Times Squaren pinta-ala. Jos ihmisiä on yhteensä 51 000 ja jokaisella neliömetrillä on 3 ihmistä, niin pinta-ala on

$$\frac{51\,000}{3} = 17\,000$$

neliömetriä. 1p (yht. 1p)

Jos 17 000 neliömetrillä olisi 2 miljoonaa ihmistä, yhdellä neliömetrillä olisi keskimäärin

$$\frac{2\,000\,000}{17\,000} = 117{,}64705\ldots \approx 120$$

ihmistä. 2p (yht. 3p)

Tällöin keskimäärin yhdellä ihmisellä olisi tilaa

$$\frac{17\,000\ \mathrm{m}^2}{2\,000\,000} = \frac{170\,000\,000\ \mathrm{cm}^2}{2\,000\,000} = 85\ \mathrm{cm}^2.$$ 3p (yht. 6p)

Aikuisen ihmisen jalkapohjan pituus on yli 20 cm ja leveys kapeimmastakin kohdasta noin 5 cm. 3p (yht. 9p) Tällöin jalkapohjan pinta-ala on yli $20 \cdot 5 = 100$ neliösenttimetriä, 2p (yht. 2p) joka on enemmän kuin yhdellä ihmisellä olisi tilaa Times Squarella. Koska ihmisellä on kaksi jalkapohjaa, yhdelle ihmiselle on aivan varmasti tilaa vähemmän kuin jalkapohjien pinta-alan verran. 1p (yht. 12p)

Vastaus:
Ihmisiä olisi neliömetrillä 120. Ihmisillä olisi keskimäärin tilaa jalkojensa alla 85 neliösenttimetriä, joka on vähemmän kuin aikuisen ihmisen jalkapohjien pinta-ala.

6. Lapsiperhetilastoja (12 p.)

Aineisto:

6.A Taulukko: Lapsiperheet

Taulukossa 6.A on esitetty lapsiperheiden lasten lukumäärä Suomessa vuoden 2017 lopussa.

1. Laske lapsiperheiden lasten lukumäärän moodi, mediaani ja keskiarvo. (6 p.)
2. Mikä on suomalaisen lapsiperheen lapsen sisarusten lukumäärän keskiarvo? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Lukumäärän moodi eli tyyppiarvo on lapsiperheiden lasten lukumääristä yleisin, toisin sanoen se lasten lukumäärä, jonka frekvenssi on suurin. Taulukosta nähdään, että yksilapsisten perheiden frekvenssi on suurin. Lasten lukumäärän moodi on siis 1. 2p (yht. 2p)

   Mediaanin voi määrittää kahdella tavalla.

   TAPA 1

   Lapsiperheitä on yhteensä 566 242 kappaletta. Lasten lukumäärän mediaani saadaan, kun perheet järjestetään lapsiluvun mukaan kasvavaan järjestykseen ja valitaan perheistä kaksi keskimmäistä ja lasketaan niiden lapsilukujen keskiarvo (perheitä on parillinen määrä). 1p (yht. 3p) Tarkasteltavien perheiden järjestysluvut ovat $\frac{566242}{2} = 283121$ ja $\frac{566242}{2} + 1 = 283122$.

   Taulukosta nähdään, että ensimmäisen kaksilapsisen perheen järjestysluku on $241709 + 1 = 241710$ ja viimeisen kaksilapsisen perheen järjestysluku on $241709 + 220116 = 461825$. Perheet 283121 ja 283122 kuuluvat tälle välille, joten ne ovat molemmat kaksilapsisia. Lasten lukumäärän mediaani on siis 2.
   1p (yht. 4p)

TAPA 2

Lasketaan perheiden lukumäärien summafrekvenssit ja suhteelliset summafrekvenssit. Mediaani on se muuttujan arvo (eli lapsien lukumäärä), jonka kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ylittää 50 %. 1p (yht. 3p)

	A	B	C	D
1	**Alle 18–vuotiaiden lasten lukumäärä**	**Perheiden lukumäärä**	Summafrekvenssi	Suhteellinen summafrekvenssi
2	1	241709	=SUMMA($B$2:B2)	=C2/$B$19
3	2	220116	=SUMMA($B$2:B3)	=C3/$B$19
4	3	75326	=SUMMA($B$2:B4)	=C4/$B$19
5	4	18409	=SUMMA($B$2:B5)	=C5/$B$19
6	5	5493	=SUMMA($B$2:B6)	=C6/$B$19
7	6	2289	=SUMMA($B$2:B7)	=C7/$B$19
8	7	1235	=SUMMA($B$2:B8)	=C8/$B$19
9	8	751	=SUMMA($B$2:B9)	=C9/$B$19
10	9	476	=SUMMA($B$2:B10)	=C10/$B$19
11	10	262	=SUMMA($B$2:B11)	=C11/$B$19
12	11	117	=SUMMA($B$2:B12)	=C12/$B$19
13	12	41	=SUMMA($B$2:B13)	=C13/$B$19
14	13	12	=SUMMA($B$2:B14)	=C14/$B$19
15	14	3	=SUMMA($B$2:B15)	=C15/$B$19
16	15		=SUMMA($B$2:B16)	=C16/$B$19
17	16	3	=SUMMA($B$2:B17)	=C17/$B$19
18				
19	Summa	=SUMMA(B2:B17)		

	A	B	C	D
1	**Alle 18–vuotiaiden lasten lukumäärä**	**Perheiden lukumäärä**	Summafrekvenssi	Suhteellinen summafrekvenssi
2	1	241709	241709	0,426865191914411
3	2	220116	461825	0,815596511738797
4	3	75326	537151	0,948624439727184
5	4	18409	555560	0,981135274317341
6	5	5493	561053	0,990836073622232
7	6	2289	563342	0,994878514839945
8	7	1235	564577	0,997059561106382
9	8	751	565328	0,9983858491599
10	9	476	565804	0,999226479137895
11	10	262	566066	0,999689178831666
12	11	117	566183	0,999895804267433
13	12	41	566224	0,99996821147142
14	13	12	566236	0,999989403823807
15	14	3	566239	0,999994701911903
16	15		566239	0,999994701911903
17	16	3	566242	1
18				
19	Summa	566242		

Lasten lukumäärän mediaani on siis 2. 2p (yht. 4p)

Luokitellun aineiston keskiarvo saadaan laskemalla jokaisen luokan arvon eli lasten lukumäärän ja frekvenssin eli perheiden lukumäärän tulo, laskemalla nämä yhteen ja jakamalla frekvenssien summalla. 1p (yht. 5p)

	A	B	C
1	**Alle 18–vuotiaiden lasten lukumäärä**	**Perheiden lukumäärä**	Lasten lukumäärän ja perheiden lukumäärän tulo
2	1	241709	241709
3	2	220116	440232
4	3	75326	225978
5	4	18409	73636
6	5	5493	27465
7	6	2289	13734
8	7	1235	8645
9	8	751	6008
10	9	476	4284
11	10	262	2620
12	11	117	1287
13	12	41	492
14	13	12	156
15	14	3	42
16	15		0
17	16	3	48
18			
19	Summa	566242	1046336
20			
21	Keskiarvo	1,84786010221778	=C19/B19

Lasten lukumäärän keskiarvo on noin $1{,}85$ lasta. 1p (yht. 6p)

Vastaus: Lasten lukumäärän moodi on 1, mediaani on 2 ja keskiarvo on $1{,}85$.

2. Yksilapsisen perheen lapsella on nolla sisarta. Kaksilapsisen perheen molemmilla lapsilla on yksi sisar. Kolmelapsisen perheen jokaisella kolmella lapsella on kaksi sisarta ja niin edelleen. Jos perheessä on n lasta, jokaisella heistä on $n-1$ sisarta. 2p (yht. 8p) Lasketaan tällä periaatteella taulukkoon uusi sarake, jossa on kunkin perhekoon lapsen sisarten lukumäärä.

   Lasten lukumäärän ja perheiden lukumäärien tulo kertoo, kuinka monta tällaiseen perheeseen kuuluvaa lasta Suomessa oli vuonna 2017. Tämä luku on laskettu taulukon sarakkeessa C. 1p (yht. 10p)

	A	B	C	D
1	**Alle 18–vuotiaiden lasten lukumäärä**	**Perheiden lukumäärä**	Lasten lukumäärän ja perheiden lukumäärän tulo	Sisarusten määrä jokaisella lapsella
2	1	241709	241709	0
3	2	220116	440232	1
4	3	75326	225978	2
5	4	18409	73636	3
6	5	5493	27465	4
7	6	2289	13734	5
8	7	1235	8645	6
9	8	751	6008	7
10	9	476	4284	8
11	10	262	2620	9
12	11	117	1287	10
13	12	41	492	11
14	13	12	156	12
15	14	3	42	13
16	15		0	14
17	16	3	48	15
18				
19	Summa	566242	1046336	
20				
21	Keskiarvo	1,84786010221778		

1p (yht. 9p)

Jokaisella tällaisella lapsella oli sarakkeessa D näkyvä määrä sisaruksia. Sarakkeessa C on siis frekvenssi eli lukumäärä ja sarakkeessa D on muuttujan (sisarusten lukumäärän) arvo. Näistä voidaan laskea keskiarvo samoin kuin kohdassa 6.1. eli laskemalla arvon ja frekvenssin tulojen summa ja jakamalla frekvenssien summalla eli kaikkien lasten lukumäärällä. 1p (yht. 11p)

	A	B	C	D	E
1	**Alle 18–vuotiaiden lasten lukumäärä**	**Perheiden lukumäärä**	Lasten lukumäärän ja perheiden lukumäärän tulo	Sisarusten määrä jokaisella lapsella	Lasten lukumäärän ja sisarusten määrän tulo
2	1	241709	241709	0	0
3	2	220116	440232	1	440232
4	3	75326	225978	2	451956
5	4	18409	73636	3	220908
6	5	5493	27465	4	109860
7	6	2289	13734	5	68670
8	7	1235	8645	6	51870
9	8	751	6008	7	42056
10	9	476	4284	8	34272
11	10	262	2620	9	23580
12	11	117	1287	10	12870
13	12	41	492	11	5412
14	13	12	156	12	1872
15	14	3	42	13	546
16	15		0	14	0
17	16	3	48	15	720
18					
19	Summa	566242	1046336		1464824
20					
21	Keskiarvo	1,8478601022178			
22					
23	Sisarusten lukumäärän keskiarvo		1,39995565478011	=E19/C19	

Vastaus: Sisarusten lukumäärän keskiarvo on $1{,}40$. 1p (yht. 12p)

7. Suklaarasia (12 p.)

Aineisto:

7.A Kuva: Suklaarasia

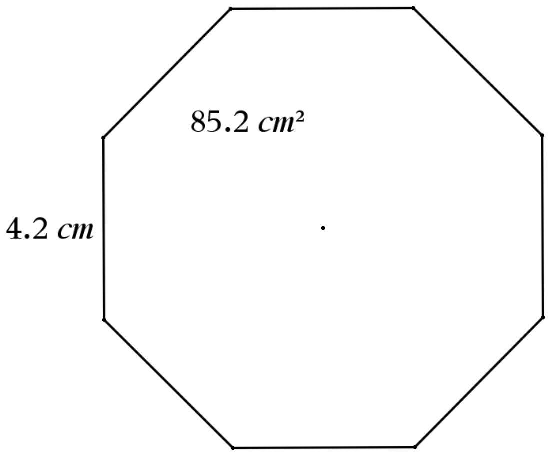
Suklaakonvehtirasia 7.A on muodoltaan särmiö, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio. Kahdeksankulmion sivun pituus on 4,2 cm ja rasian korkeus 6,6 cm. Laske rasian tilavuus.

Ratkaisu.

Särmiön tilavuus on pohjan pinta-ala kertaa korkeus. Lasketaan pohjan pinta-ala.

TAPA 1: CAS-OHJELMALLA

Piirretään CAS-ohjelman työkaluja käyttämällä säännöllinen kahdeksankulmio. 1p (yht. 1p) Mitataan yhden sivun pituus ja tarvittaessa säädetään kahdeksankulmion kokoa, kunnes sivun pituus on $4{,}2\,\mathrm{cm}$ 2p (yht. 3p). Mitataan kahdeksankulmion pinta-ala ohjelman työkalulla.



Pohjan pinta-ala on $85{,}2\,\mathrm{cm}^2$ 6p (yht. 9p)

Pisteytyksestä: Rasian pohjan pinta-alan voi laskea haluamallaan CAS-ohjelmalla, kunhan osoittaa kuvin ja selityksin miten on päätynyt ratkaisuun.

Jos laskee tehtävän siten, että piirtää koko rasiasta 3D-kuvan ja laskee rasian tilavuuden CAS-ohjelman työkaluilla, voi pisteitä saada esimerkiksi seuraavasti:

- Säännollisen kahdeksankulmion kuva 3p (yht. 3p)
- Pohjan ala määritetty ohjelmalla 6p (yht. 9p)
- Särmiön tilavuus määritetty ohjelmalla 3p (yht. 12p)

Tehtävän matemaattisesti hankalin vaihe on särmiön pohjan pinta-alan määrittäminen. Jos sen on tehnyt oikein, saa yhdeksän pistettä. Pinta-alasta tilavuuteen eteneminen tuo viimeiset kolme pistettä.

TAPA 2: GEOMETRIALLA

Kahdeksankulmio saadaan, kun neliön kulmista leikataan tasakylkisen kolmion muotoiset palat pois. 1p (yht. 1p) Merkitään tällaisen kolmion kyljen pituutta x:llä. Neliön kulmat ovat suoria kulmia, joten tämä kolmio on myös suorakulmainen. Lasketaan kyljen x pituus Pythagoraan lauseella:

$$
\begin{aligned}
4{,}2^2 &= x^2 + x^2 \quad \text{1p (yht. 3p)} \\
&= 2x^2 \\
x^2 &= \frac{(4{,}2\,\mathrm{cm})^2}{2} \\
x &= \underset{(-)}{+} 2{,}96984\ldots\ \mathrm{cm} \quad \text{1p (yht. 3p)}
\end{aligned}
$$

Kolmion pinta-ala on siis

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2{,}96984\ldots\ \mathrm{cm} \cdot 2{,}96984\ldots\ \mathrm{cm} \\
&= 4{,}41\,\mathrm{cm}^2 \quad \text{2p (yht. 5p)}
\end{aligned}
$$

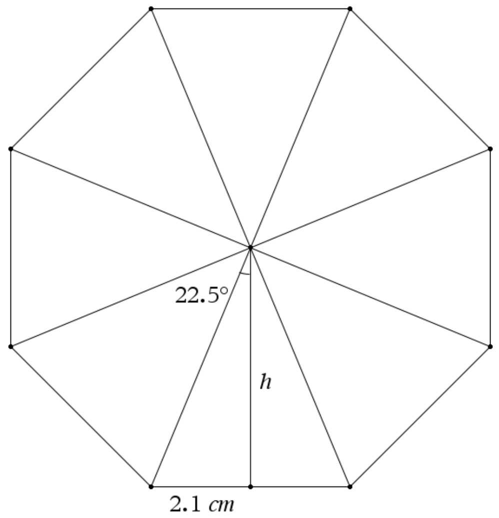
Kahdeksankulmion ympärille piirretyn neliön sivun pituus on $2{,}96984\ldots\ \mathrm{cm} + 4{,}2\,\mathrm{cm} + 2{,}96984\ldots\ \mathrm{cm} = 10{,}1396\ldots\ \mathrm{cm}$. Neliön pinta-ala on siis

$$
\begin{aligned}
A_4 &= (10{,}1396\ldots\ \mathrm{cm})^2 \\
&= 102{,}813\ldots\ \mathrm{cm}^2 \quad \text{2p (yht. 7p)}
\end{aligned}
$$

Kahdeksankulmion pinta-ala saadaan, kun neliön pinta-alasta vähennetään neljä kertaa kolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_8 &= A_4 - 4 \cdot A_3 \\ &= 102{,}813\ldots\ \mathrm{cm}^2 - 4 \cdot 4{,}41\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 85{,}1734\ldots\ \mathrm{cm}^2 \\ &\approx 85{,}2\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$ 2p (yht. 9p)

TAPA 3: GEOMETRIALLA



Jaetaan kahdeksankulmio kahdeksaan kolmioon siten, että jokaisen kolmion kantana on kahdeksankulmion sivu ja huippuna kahdeksankulmion keskipiste. 1p (yht. 1p) Kolmion huippukulmaksi tulee $\frac{360°}{8} = 45°$. 1p (yht. 2p) Kun kolmio jaetaan edelleen kahtia huippukulman puolittajalla, saadaan suorakulmainen kolmio, jonka pienin kulma on $\frac{45°}{2} = 22{,}5°$. 1p (yht. 3p) Kolmion korkeus h saadaan yhtälöstä

$$\tan(22{,}5°) = \frac{2{,}1\,\mathrm{cm}}{h}$$ 1p (yht. 4p)

$$\begin{aligned} h &= \frac{2{,}1\,\mathrm{cm}}{\tan(22{,}5°)} \\ &= 5{,}06984\ldots\ \mathrm{cm} \end{aligned}$$ 1p (yht. 5p)

Kolmion pinta-ala on siis

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}2\,\mathrm{cm} \cdot 5{,}06984\ldots\ \mathrm{cm} = 10{,}6466\ldots\ \mathrm{cm}^2$$ 2p (yht. 7p)

Kahdeksankulmiossa on kahdeksan tällaista kolmiota, joten sen pinta-ala on

$$A_8 = 8 \cdot A_3 = 8 \cdot 10{,}6466\ldots\ \mathrm{cm}^2 = 85{,}1734\ldots\ \mathrm{cm}^2$$ 2p (yht. 9p)

Rasian tilavuus on pohjan pinta-ala kertaa korkeus. 1p (yht. 10p)

$$V = A_8 \cdot h = 85{,}1734\ldots\ \mathrm{cm}^2 \cdot 6{,}6\,\mathrm{cm} = 562{,}144\ldots\ \mathrm{cm}^3 \approx 560\,\mathrm{cm}^3$$ 2p (yht. 12p)

Vastaus: Rasian tilavuus on $560\,\mathrm{cm}^3$.

8. Funktion väheneminen (12 p.)

Selvitä derivaatan avulla, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$ vähenee nopeimmin.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Polynomifunktio vähenee nopeimmin, kun derivaatta on pienimmillään. 2p (yht. 2p)
Funktion f derivaatta on

$$f'(x) = 4x - 1.$$ 3p (yht. 5p)

Halutaan siis selvittää, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa $f'(x)$ on pienimmillään.

Funktion f' kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 4. 1p (yht. 6p) Koska kulmakerroin on positiivinen, suora on nouseva. 1p (yht. 7p)

Välillä $-1 \leq x \leq 3$ funktio f' saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $x = -1$. 3p (yht. 10p) Tällöin kohdassa $x = -1$ funktio f vähenee nopeimmin. 2p (yht. 12p)

Vastaus: $x = -1$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Polynomifunktio vähenee nopeimmin, kun derivaatta on pienimmillään. 2p (yht. 2p)
Funktion f derivaatta on

$$f'(x) = 4x - 1.$$ 3p (yht. 5p)

Halutaan siis selvittää, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa $f'(x)$ on pienimmillään.

Välillä $-1 \leq x \leq 3$ funktion $f'(x) = 4x - 1$ pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. 1p (yht. 6p) Funktion f' derivaatta on

$$f''(x) = 4,$$

jolla ei ole nollakohtia. 1p (yht. 7p) Lasketaan funktion f' arvot välin päätepisteissä:

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 1 = -5$$ 1p (yht. 8p)

$$f'(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 11$$ 1p (yht. 9p)

Funktion f' pienin arvo välillä $-1 \leq x \leq 3$ saadaan siis kohdassa $x = -1$, 1p (yht. 10p)
jolloin kohdassa $x = -1$ funktio f vähenee nopeimmin. 2p (yht. 12p)

Vastaus: $x = -1$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 3:

Funktio vähenee nopeimmin, kun sen derivaatta on pienimmillään.

$f(x):=2\cdot x^2-x+5$ ▸ *Valmis*

Derivoidaan funktio **f**

$\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ $4\cdot x-1$

Ratkaistaan kohta, jossa derivaatta saa pienimmän arvonsa välillä $[-1,3]$.

fMin$(4\cdot x-1,x,-1,3)$ ▸ $x=-1$

Vastaus: Funktio vähenee nopeimmin kohdassa x=−1.

Pisteytysehdotus:

- Funktio vähenee nopeimmin, kun derivaatta on pienimmillään: 2p (yht 2p).
- Funktion f derivaatta: 3p (yht. 5p).
- Kohdan, jossa funktio f' saa pienimmän arvonsa välillä $[-1, 3]$, määrittäminen laskinohjelmalla: 5p (yht 10p).
- Päätelmä, että tällöin funktio vähenee nopeimmin kohdassa $x = 1$: 2p (yht 12p).

9.1. Jaksollisuus (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet) (12 p.)

Kummalla funktiolla on lyhyempi jakso: $f(t) = \sin(3t)$ vai $g(t) = \cos^2(2t)$? Perustele väitteesi.

Ratkaisu.

TAPA 1

Funktion $\sin(t)$ jakso on 2π. 1p (yht. 1p)
Funktion $f(t) = \sin(3t)$ jakso on $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$. 3p (yht. 4p)

Funktion $\cos(t)$ jakso on 2π. 1p (yht. 5p) Funktion $\cos(2t)$ jakso on $\frac{2\pi}{2} = \pi$. 2p (yht. 7p)
Kun lauseke $\cos(2t)$ korotetaan toiseen potenssiin, niin funktion jakso lyhenee puoleen, koska kuvaajan x-akselin alapuolinen osa peilautuu x-akselin yläpuolelle. 1p (yht. 8p)
Tällöin jakson pituudeksi tulee $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$. 2p (yht. 10p)

Koska $\frac{2}{3}\pi > \frac{1}{2}\pi$, niin funktion g jakso on lyhyempi. 2p (yht. 12p)

Vastaus: Funktion g jakso on lyhyempi.

TAPA 2

Funktion $\sin(t)$ jakso on 2π. 1p (yht. 1p)
Funktion $f(t) = \sin(3t)$ jakso on $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$. 3p (yht. 4p)

Funktion $\cos(t)$ jakso on 2π. 1p (yht. 5p) Funktion $\cos^2(t)$ jakso on π 2p (yht. 7p), sillä $\cos(t) = -\cos(t+\pi)$ ja $x^2 = (-x)^2$ kaikille x. Koska funktion $\cos^2(t)$ jakso on π, funktion $g(t) = \cos^2(2t)$ jakso on $\frac{1}{2}\pi$. 3p (yht. 10p)

Koska $\frac{2}{3}\pi > \frac{1}{2}\pi$, niin funktion g jakso on lyhyempi. 2p (yht. 12p)

Vastaus: Funktion g jakso on lyhyempi.

9.2. Nopan heitto (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet) (12 p.)

Noppaa heitetään 10 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan täsmälleen 2 kuutosta?

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Kyseessä on toistokoe, 2p (yht. 2p) jossa yksittäisellä heitolla todennäköisyys saada kuutonen on $\frac{1}{6}$. 2p (yht. 4p) Todennäköisyys saada tasan kaksi kuutosta saadaan binomitodennäköisyytenä laskinohjelman pistetodennäköisyysfunktiolla, jossa

- toistojen lukumäärä on $n = 10$.
- yksittäisellä heitolla kuutosen todennäköisyys on $p = \frac{1}{6}$.
- selvitetään, että saadaan tasan $X = 2$ kuutosta.

$$\mathrm{binomPdf}\left(10,\frac{1}{6},2\right) \blacktriangleright 0.29071$$

Laskinohjelmalla saadaan todennäköisyydeksi $0{,}2907\ldots$ 6p (yht. 10p) $\approx 29{,}1\ \%$.

Vastaus: Todennäköisyys on 29,1 %. 2p (yht. 12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Kyseessä on toistokoe, 2p (yht. 2p) jossa yksittäisellä heitolla todennäköisyys saada kuutonen on $\frac{1}{6}$ 2p (yht. 4p) ja toistojen lukumäärä on 10. Todennäköisyys saada tasan kaksi kuutosta saadaan binomitodennäköisyytenä

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-2} \quad \text{6p (yht. 10p)}\\
&= \frac{1953125}{6718464}\\
&= 0{,}2907\ldots\\
&\approx 29{,}1\ \%
\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on 29,1 %. 2p (yht. 12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3:

Kyseessä on toistokoe, 2p (yht. 2p) jossa yksittäisellä heitolla todennäköisyys saada kuutonen on $\frac{1}{6}$. 2p (yht. 4p)

Todennäköisyys, että yksittäisellä heitolla tulee muu kuin kuutonen on $\frac{5}{6}$. 2p (yht. 6p)

Todennäköisyys, että kahdella ensimmäisellä heitolla tulee kuutoset ja loput heitot eivät ole kuutosia on

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 . \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Kuutosten paikat voidaan valita $\binom{10}{2}$ eri tavalla. 1p (yht. 8p)

Todennäköisyys saada täsmälleen 2 kuutosta on siis

$$\binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \quad \text{2p (yht. 10p)} \quad = \frac{1953125}{6718464} = 0{,}2907\ldots \approx 29{,}1\ \%$$

Vastaus: Todennäköisyys on 29,1 %. 2p (yht. 12p)

10. Neuleyritys (12 p.)

Aineisto:

10.A Taulukko: Yrityksen kulut
10.B Teksti: Miten arvonlisäveron määrä lasketaan?

Naapurukset Pauli ja Johanna päättävät perustaa lasten neuleita valmistavan yrityksen.

1. Yritys myy neuleita 70 euron kappalehinnalla. Kuinka monta tilausta tarvitaan kuukaudessa, jotta tulot kattavat taulukossa 10.A luetellut kulut? (4 p.)

2. Pauli ja Johanna miettivät, että yrityksen olisi hyvä tehdä voittoa, ja tuumaavat, että tähän voisi päästä, jos kuukausittain valmistetaan ja myydään 100 neuletta. Riittävätkö kuukauden tarpeisiin varatut langat tähän, kun merinovillalanka maksaa 39 euroa kilolta ja yhteen neulepaitaan tarvitaan 250 grammaa lankaa? (4 p.)

3. Aloittelevina yrittäjinä Paulilta ja Johannalta on jäänyt laskuissaan arvonlisävero sekä lomat huomioimatta. Kerro, miten näiden seikkojen ottaminen huomioon vaikuttaa siihen, kuinka paljon myyntituloja yritys tarvitsee ollakseen kannattava. Tietoa arvonlisäveron laskemisesta löytyy tekstistä 10.B. (4 p.)

Ratkaisu.

1. Yrityksen kuukausittaiset kulut saadaan laskettua kopioimalla aineisto taulukkolaskentaohjelmaan:

	A	B
1	**Kululaji**	**Kulut €/kk**
2	Palkat	3900
3	Eläkemaksut	735
4	Työttömyyskassamaksut	40
5	Vuokra	370
6	Sähkö ja vesi	60
7	WiFi	20
8	Vakuutukset	50
9	Neulekoneet	20
10	Langat	400
11	Muut tarvikkeet	30
12		
13	Summa	5625

Yrityksen kuukausittaiset kulut ovat siis 5625 €. 2p (yht. 2p)

Merkitään yritykseltä tilattujen neuleiden määrää x:llä. Neuleiden myynnistä saatava tulo on kappalehinnan 70 € ja myytyjen neuleiden määrän x tulo. Myyntitulot kattavat kulut, kun tulot ovat vähintään yhtä suuret kuin kulut. Ratkaistaan, millä x:n arvolla tulot ovat yhtä suuret kuin kulut:

$$\begin{aligned} x \cdot 70 &= 5625 \qquad\qquad \| : 70 \\ x &= \frac{5625}{70} \\ x &= 80{,}35714\ldots \end{aligned}$$

Koska neuleita tilataan kappaleittain, on Paulin ja Johannan myytävä vähintään 81 2p (yht. 4p) neuletta kuukaudessa, jotta tulot kattavat kulut.

Vastaus: Kuukaudessa tarvitaan vähintään 81 tilausta.

2. Yhteen neulepaitaan tarvitaan $250\,\mathrm{g}$ lankaa, eli $0{,}250\,\mathrm{kg}$ lankaa. Sataan neuleeseen tarvitaan siis

$$0{,}250\,\mathrm{kg} \cdot 100 = 25\,\mathrm{kg}$$ 2p (yht. 6p)

lankaa. Tämän lankamäärän hinnaksi tulee

$$25\,\mathrm{kg} \cdot 39\ \text{€}/\mathrm{kg} = 975\,\text{€}$$ 2p (yht. 8p)

Kuukauden tarpeisiin oli varattu aineiston mukaan 400 € lankoja varten. Tämä rahasumma ei siis riitä 100 neuleen ompelemiseen tarvittavien lankojen ostoon.

Vastaus: Kuukauden tarpeisiin varatut langat eivät riitä.

3. Pisteytyksestä: Osatehtävässä 10.3. on monta tapaa saada täydet pisteet. Alla on esitetty vain yksi mahdollinen ratkaisu. Lopuksi on kommentoitu muita mahdollisia huomioita, joista voi saada pisteitä.

Kattaakseen yrityksen kulut, on yrityksen saatava kuukaudessa myyntituloja $5625\,€$. Koska myyntituloista maksetaan arvonlisävero, on kuukausittaisen verollisen myyntitulon oltava suurempi. Jotta veroton myyntitulo olisi $5625\,€$ suuruinen, on verollisen myyntitulon oltava

$$5625\,€ + 5625\,€ \cdot \frac{24}{100} = 6975\,€$$ 1p (yht. 9p)

Kuukausittaisen myyntitulon on oltava $6795\,€$, kun arvonlisävero otetaan huomioon.

Jos Pauli ja Johanna haluavat pitää vuodessa yhden kuukauden lomaa, on tämän kuukauden kulut katettava muiden 11 kuukauden myyntituloilla. 1p (yht. 10p) Töissäolokuukauden kulut ovat silloin

$$5625\,€ + \frac{5625\,€}{11} = 6136{,}3636\ldots\,€$$ 1p (yht. 11p)

Töissäolokuukauden verottoman myyntitulon on siis oltava $6136{,}36\,€$, jotta sillä katetaan myös lomakuukauden kulut. Tällöin töissäolokuukauden verollisen myyntitulon on oltava

$$6136{,}3636\ldots\,€ + 6136{,}3636\ldots\,€ \cdot \frac{24}{100} = 7609{,}0909\ldots \approx 7609{,}09\,€,$$ 1p (yht. 12p)

kun sekä arvonlisävero että loma otetaan huomioon.

Pisteytyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 18.3.2020) on lueteltu seuraavat seikat, joista kustakin saa yhden pisteen:

- Suomessa yleensä vietetään noin 1 kk kesälomaa, joten yrityksen tulot täytyy saada noin 11 kk työllä.
- Jos Pauli ja Johanna ovat lomalla eri aikaan, voi myynti olla auki läpi vuoden, jolloin täytyy vain varmistaa, että heillä on riittävästi neuleita valmiina ennen lomaa.
- Siten loma ei välttämättä vaikuta yrityksen budjettiin.
- ALV:a pitää maksaa myyntituloista 24%, eli 70 eurosta ainoastaan $70/1{,}24 \approx 56$ euroa tulee yritykselle.
- Jos tuotteen hintaa voi korottaa $70 \cdot 1{,}24 \approx 87$ euroon, voi yritys toimia alkuperäisellä myyntimäärällä.

- Vaihtoehtoisesti myyntitavoitetta voi kasvattaa, jolloin pitää muistaa myös kasvanut lankakulutus.
- ALV:sta vain osa jää yrityksen lopulliseksi kuluksi, sillä se voi vähentää verotuksessa ostamiensa tuotteiden ja palvelujen ALV:t.
- Palkka- ja vuokrakuluissa ei kuitenkaan ole ALV:a, ja joissain muissa kustannuksissa saattaa olla alempi AVL-kanta, joten suuri osa ALV:sta tulee yrityksen lopulliseksi kustannukseksi

Täydet neljä pistettä voi siis saada monella eri tavalla.

Muita huomioita, jotka voivat vaikuttaa pisteutykseen:

- Loman pituudeksi laskettu 1 kuukausi on vain arvio, sillä tehtäväannossa ei tarkennettu loman määrää. Mikä tahansa realistinen loman pituus kelpaa laskujen pohjaksi.
- Lisäksi voidaan todeta, että lomakuukauden aikana yrityksen kulut eivät säily aivan ennallaan. Jos Pauli ja Johanna haluavat loma-ajalta saman palkan kuin töissäoloajalta, palkkamenot sekä palkan sivukulut (eläkemaksut ja työttömyyskassamaksut) säilyvät ennallaan. Tässä ei ole huomioitu lomarahoja. Toimitilojen vuokra ja vakuutukset säilyvät ennallaan. Vesi- sähkö- ja wifi-sopimukset voi katkaista loman ajaksi, mutta tästä voi aiheutua lisäkuluja. Loman aikana sähkö- ja vesilasku on kuitenkin pienempi. Lankaa ja muita tarvikkeita ei kulu loman aikana. Jos neulekoneiden kulu $20\,€$ koostuu varaosista, tätäkään kulua ei synny loman aikana. Jos kyse on koneiden osamaksusta, on se maksettava myös loman aikana.

  Varovainen arvio lomakuukauden kuluista saadaan vähentämällä työssäolokuukauden kuluista lankojen ja muiden tarvikkeiden kulut sekä puolet sähkö- ja vesimaksuista. Tällöin lomakuukauden kuluiksi tulee $5165\,€$.

	A	B	C
1	**Kululaji**	**Kulut €/kk**	**Lomakk**
2	Palkat	3900	3900
3	Eläkemaksut	735	735
4	Työttömyyskassamaksut	40	40
5	Vuokra	370	370
6	Sähkö ja vesi	60	30
7	WiFi	20	20
8	Vakuutukset	50	50
9	Neulekoneet	20	20
10	Langat	400	
11	Muut tarvikkeet	30	
12			
13	Summa	5625	5165

Tällöin töissäolokuukauden aikana pitää kerätä verottomia myyntituloja

$$5625\,€ + \frac{5165\,€}{11} = 6094{,}5454\ldots\,€$$

Tällöin töissäolokuukauden verollisen myyntitulon on oltava

$$6094{,}5454\ldots\,€ + 6094{,}5454\ldots\,€ \cdot \frac{24}{100} = 7557{,}236\ldots \approx 7557{,}24\,€,$$

kun sekä arvonlisävero että loma otetaan huomioon.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

11. Nelitahokas (12 p.)

Aineisto:

11.A GeoGebra-tiedosto: Nelitahokas

Nelitahokkaassa $ABCD$ on $AB = AC = BC = AD = BD = 1$. Mikä on nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus?

Voit käyttää GeoGebra-tiedostoa 11.A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Nelitahokas on kartio, jonka pohjana on kolmio. Valitaan nyt pisteiden A, B ja C muodostama kolmio ABC nelitahokkaan pohjaksi. Koska tehtävänannon perusteella $AB = AC = BC = 1$, on tämä tasasivuinen kolmio. 1p (yht. 1p) Tasasivuisen kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$ 2p (yht. 3p)

sillä nyt sivun pituus $a = 1$.

Myös kolmion ABD sivujen pituudet ovat kaikki 1, joten myös se on tasasivuinen kolmio. Sivun AC pituutta ei ole kiinnitetty, joten se voi olla mitä tahansa, kunhan muut pituudet säilyvät annetun suuruisina. Käytännössä nelitahokas koostuu kahdesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden välinen kulma voi vaihdella vapaasti.

Nelitahokas on kartio, joten sen tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Koska nelitahokkaan pohjan pinta-ala ei muutu, tilavuus on suurimmillaan, kun nelitahokkaan korkeus h on suurimmillaan. 1p (yht. 4p)

Nelitahokkaan korkeus on suurimmillaan, kun kolmio ABD on kohtisuorassa pohjakolmiota ABC vastaan. 3p (yht. 1p) Tällöin nelitahokkaan korkeus h on sama kuin kolmion ABD korkeus. 1p (yht. 8p) Kolmion ABD korkeus saadaan Pythagoraan lauseella, kun merkitään janan AB keskipistettä E:llä:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AE^2 + ED^2 \\ ED^2 &= AD^2 - AE^2 \\ ED &= \sqrt{AD^2 - AE^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2p (yht. 10p)

Nelitahokkaan tilavuus on silloin

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Ah \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{24} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2p (yht. 12p)

Vastaus: Nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus on $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Nelitahokas on kartio, jonka pohjana on kolmio. Valitaan nyt pisteiden A, B ja C muodostama kolmio ABC nelitahokkaan pohjaksi. Koska tehtävänannon perusteella $AB = AC = BC = 1$, on tämä tasasivuinen kolmio. 1p (yht. 1p) Tasasivuisen kolmion korkeus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla. Merkitään janan

AB keskipistettä E:llä, jolloin kolmion ABC korkeus (eli janan EC pituus) on

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + EC^2 \\ EC^2 &= AC^2 - AE^2 \\ EC &= \sqrt{AC^2 - AE^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$ 2p (yht. 3p)

Kolmion pinta-ala on puoli kertaa kanta kertaa korkeus, eli kolmion ABC pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$ 2p (yht. 5p)

Myös kolmion ABD sivujen pituudet ovat kaikki 1, joten myös se on tasasivuinen kolmio. Sivun AC pituutta ei ole kiinnitetty, joten se voi olla mitä tahansa, kunhan muut pituudet säilyvät annetun suuruisina. Käytännössä nelitahokas koostuu kahdesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden välinen kulma voi vaihdella vapaasti.

Nelitahokas on kartio, joten sen tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Koska nelitahokkaan pohjan pinta-ala ei muutu, tilavuus on suurimmillaan, kun nelitahokkaan korkeus h on suurimmillaan. 1p (yht. 6p)

Nelitahokkaan korkeus on suurimmillaan, kun kolmio ABD on pohjakolmiota ABC vastaan kohtisuorassa. 3p (yht. 9p) Tällöin nelitahokkaan korkeus h on sama kuin kolmion ABD korkeus. Kolmion ABD korkeus on yhtä suuri kuin kolmion ABC korkeus eli $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1p (yht. 10p)

Nelitahokkaan tilavuus on silloin

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Ah \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{24} \\ &= \frac{1}{8} \quad \boxed{\text{2p (yht. 12p)}} \end{aligned}$$

Vastaus: Nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus on $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

12. Toisen asteen polynomi (12 p.)

Tutkitaan toisen asteen polynomia $p(x)$. Polynomista tiedetään vain, että sen arvo kohdassa $x = -2$ on negatiivinen ja että sen arvo kohdassa $x = 1$ on positiivinen. Voiko näiden tietojen perusteella selvittää termin x^2 kertoimen etumerkin tai yhtälön $p(x) = 0$ ratkaisujen lukumäärän?

Ratkaisu.

OSA 1, RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Toisen asteen polynomilla on nolla, yksi tai kaksi nollakohtaa. 2p (yht. 2p)

Jos toisen asteen polynomilla ei ole yhtään nollakohtaa, funktio p saa vain negatiivisia ($p(x) < 0$) tai positiivisia ($p(x) > 0$) arvoja. Näin ei ole, koska alkutietojen mukaan $p(-2) < 0$ ja $p(1) > 0$. 2p (yht. 4p)

Jos toisen asteen polynomilla on yksi nollakohta, funktio p saa vain epänegatiivisia arvoja $p(x) \geq 0$ tai epäpositiivisia $p(x) \leq 0$ arvoja. Näin ei ole, koska alkutietojen mukaan $p(-2) < 0$ ja $p(1) > 0$.

Toisen asteen polynomilla p on siis oltava kaksi nollakohtaa eli yhtälöllä $p(x) = 0$ on kaksi ratkaisua. 2p (yht. 6p)

OSA 1, RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Toisen asteen polynomin kuvaaja on paraabeli. Paraabelit ovat joko alaspäin aukeavia tai ylöspäin aukeavia.

Koska $p(-2)$ ja $p(1)$ ovat erimerkkiset, funktion p kuvaajaparaabelin täytyy leikata x-akseli ainakin kerran kohtien $x = -2$ ja $x = 1$ välissä. 2p (yht. 2p)

Jos paraabeli aukeaa ylöspäin, se leikkaa x-akselin myös kohdan $x = -2$ vasemmalla puolella. Jos paraabeli aukeaa alaspäin, se leikkaa x-akselin myös kohdan $x = 1$ oikealla puolella.

Kuvaajaparaabeli leikkaa siis x-akselin vähintään kahdesti. 2p (yht. 4p)

Koska kyseessä on paraabeli, se leikkaa x-akselin korkeintaan kahdesti. Siis kuvaajaparaabeli leikkaa x-akselin täsmälleen kahdesti, joten yhtälöllä $p(x) = 0$ on täsmälleen 2 ratkaisua. 2p (yht. 6p)

OSA 1, RATKAISUVAIHTOEHTO 3:

Toisen asteen polynomin kuvaaja on paraabeli. Paraabelit ovat joko alaspäin aukeavia tai ylöspäin aukeavia.

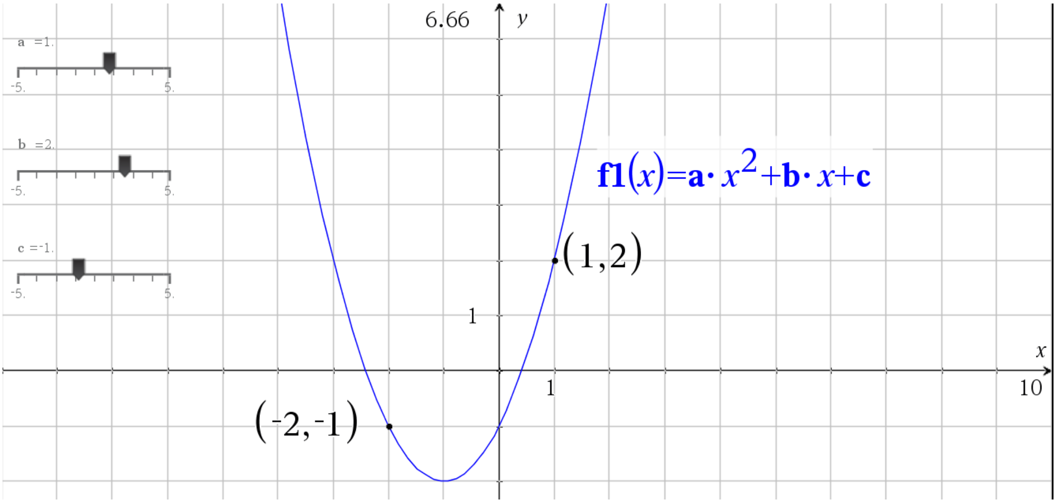
Jos paraabeli on alaspäin aukeava, paraabelia vastaavalla funktiolla on suurin arvo ja funktio saa kaikki suurinta arvoaan pienemmät arvot kahdessa eri kohdassa. Jos toisen asteen polynomin p kuvaaja on alaspäin aukeava, sen suurin arvo on positiivinen, koska sen jokin arvo on positiivinen. Tällöin se saa arvon nolla kahdessa kohdassa. 3p (yht. 3p)

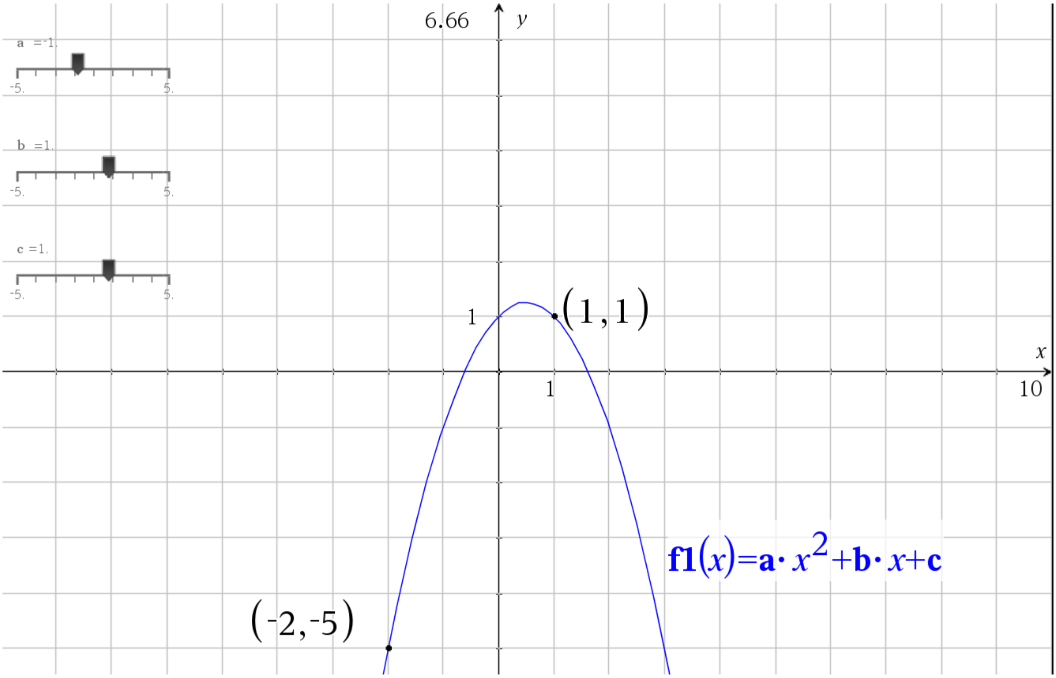
Jos paraabeli on ylöspäin aukeava, paraabelia vastaavalla funktiolla on pienin arvo ja funktio saa kaikki pienintä arvoaan suurimmat arvot kahdessa eri kohdassa. Jos toisen asteen polynomin p kuvaaja on ylöspäin aukeava, sen pienin arvo on negatiivinen, koska sen jokin arvo on negatiivinen. Tällöin se saa arvon nolla kahdessa kohdassa.

Yhtälöllä $p(x) = 0$ on siis kaksi ratkaisua. 3p (yht. 6p)

OSA 2, RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Paraabelin toisen asteen termin kerrointa ei voida päätellä annettujen tietojen avulla, kuten alla näkyvistä kuvista nähdään. Kuvissa on toisen asteen polynomit, joissa funktion arvo kohdassa $x = -2$ on negatiivinen ja funktion arvo kohdassa $x = 1$ on positiivinen. Ylemmässä kuvassa on polynomi $x^2 + 2x - 1$, jonka toisen asteen termin kerroin on positiivinen 1 ja alemmassa kuvassa on polynomi $-x^2 + x + 1$, jonka toisen asteen termin kerroin on negatiivinen -1.





Pisteytysehdotus:

- Kummankin tehtävään sopivan polynomin keksimisestä 1p.
- Näyttämisestä, että polynomien arvot kohdassa $x = -2$ ovat negatiivisia ja kohdassa $x = 1$ ovat positiivisia 1p kummankin polynomin osalta.
- Päätelmästä, että toisen asteen termin kertoimen etumerkkiä ei voi päätellä: 2p.

OSA 2, RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Toisen asteen termin kertoimen etumerkkiä ei voi päätellä näillä tiedoilla.

Todistus:

Määritellään toisen asteen polynomit p_1 ja p_2:

$$p_1(x) = -(x-0)(x-2) = -x^2 + 2x \quad \text{1p (yht. 7p)}$$
$$p_2 = (x-0)(x-(-3)) = x^2 + 3x \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

Polynomit on keksitty hyödyntäen tietoa, että toisen asteen polynomi, jolla on nollakohdat x_1 ja x_2 voidaan esittää muodossa $a(x-x_1)(x-x_2)$. Toinen nollakohta on valittu olemaan kohtien -2 ja 1 välissä ($x_1 = 0$), jotta funktion arvot olisivat eri merkkiset kohdissa $x = -2$ ja $x = 1$.

Kerroin a on valittu toisessa polynomissa negatiiviseksi, jolloin paraabeli aukeaa alaspäin, jolloin halutaan, että toinen nollakohta on suurempi kuin 1 (valittu: $x_2 = 2$), jotta kohdassa $x = -2$ funktion arvo olisi negatiivinen ja kohdassa $x = 1$ funktion arvo olisi positiivinen.

Vastaavasti kerroin a on valittu toisessa polynomissa positiiviseksi, jolloin paraabeli aukeaa ylöspäin, jolloin halutaan, että toinen nollakohta on pienempi kuin -2 (valittu: $x_2 = -3$), jotta kohdassa $x = -2$ funktion arvo olisi negatiivinen ja kohdassa $x = 1$ funktion arvo olisi positiivinen.

Nyt

$$\begin{aligned} p_1(-2) &= -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) = -4 - 4 = -8 < 0 \\ p_1(1) &= -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 > 0 \quad \boxed{\text{1p (yht. 9p)}} \\ p_2(-2) &= (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2 < 0 \\ p_2(1) &= 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 + 3 = 4 > 0, \quad \boxed{\text{1p (yht. 10p)}} \end{aligned}$$

joten molemmat polynomit täyttävät tehtävänannon ehdot. Kuitenkin polynomin p_1 toisen asteen termin kerroin on negatiivinen ja polynomin p_2 toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Polynomista p ei siis voida päätellä toisen asteen termin kertoimen etumerkkiä. 2p (yht. 12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

13. Meerin virheet (12 p.)

Meeri on ratkaissut seuraavan tehtävän: *Määritä funktion* $2x^3 - 7x^2 + 5x$ *suurin arvo, kun* $-1 \leq x \leq 3$. Hänen ratkaisunsa on seuraava:

> Suurin arvo eli maksimi löydetään derivaatan avulla, ts. $6x^2 - 14x + 5 = 0$. Ratkaisukaavalla saadaan $x = \frac{7 \pm \sqrt{16}}{6}$ eli $x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{11}{6}$. Merkkikaavion avulla nähdään, että ensimmäinen näistä on maksimikohta, joten funktion suurin arvo on $6 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 14 \cdot \frac{1}{2} + 5 = -\frac{1}{2}$.

Selitä, mitä virheitä Meerin ratkaisussa on. Esitä myös korjattu versio ratkaisusta.

Ratkaisu.

Meerin tekemät virheet:

1. Meeri samaistaa funktion suurimman arvon ja maksimin. Maksimi ei välttämättä ole kuitenkaan suurin arvo vaan on mahdollista, että maksimi on vain paikallinen maksimi.

   Pisteytyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä ei ole huomioitu tätä virhettä 1. Näkemyksemme mukaan virheen 1. löytämisestä voi antaa 2 pistettä. Kuitenkin siten, että virheiden löytämisestä saa korkeintaan 8 pistettä.

2. Meeri ei ota huomioon, että tehtävässä kysytään suurinta arvoa suljetulla välillä, jolloin täytyy tutkia myös funktion arvot välin päätepisteissä. 3p (yht. 2p)

3. Meeri on saanut ratkaisukaavalla väärän vastauksen $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{16}}{6}$. 2p (yht. 5p)

4. Viimeisellä rivillä, kun Meeri laskee funktion suurinta arvoa, hän sijoittaa maksimikohdan $x = \dfrac{1}{2}$ funktion derivaatan lausekkeeseen, vaikka se pitäisi sijoittaa funktion lausekkeeseen $2x^3 - 7x^2 + 5x$. 3p (yht. 8p)

Korjattu versio ratkaisusta:

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Funktion $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x$ derivaatta on $f'(x) = 6x^2 - 14x + 5$. Ratkaistaan derivaatan nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 14x + 5 &= 0 \\
x &= \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5}}{12} \\
&= \frac{14 \pm \sqrt{76}}{12} \\
&= \frac{14 \pm 2\sqrt{19}}{12} \\
&= \frac{7 \pm \sqrt{19}}{6}
\end{aligned}
$$

1p (yht. 9p)

$$x = 0{,}44018\ldots \qquad \text{tai} \qquad x = 1{,}8931\ldots$$

Lasketaan derivaatan arvot derivaatan nollakohtien molemmin puolin ja piirretään kulkukaavio:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 6 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 5 = 5 > 0 \\
f'(1) &= 6 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 + 5 = -3 < 0 \\
f'(2) &= 6 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 5 = 1 > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & \frac{7-\sqrt{19}}{6} & \frac{7+\sqrt{19}}{6} & \\
f'(x) & + & - & + \\
\hline
f(x) & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & \text{max} & \text{min} &
\end{array}
$$

1p (yht. 10p)

Funktion suurin arvo suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 3$ saadaan siis joko kohdassa $x = \frac{7-\sqrt{19}}{6}$ tai $x = 3$. 1p (yht. 11p) Lasketaan funktion arvot.

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right) \\
&= 1{,}10151\ldots
\end{aligned}
$$

Näistä suurin on $f(3) = 6$. Funktion suurin arvo on siis $f(3) = 6$. 1p (yht. 12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Suljetulla välillä funktion suurin arvo saavutetaan välillä olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä. 2p (yht. 10p)

Funktion $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x$ derivaatta on $f'(x) = 6x^2 - 14x + 5$. Ratkaistaan derivaatan nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$\begin{aligned}
6x^2 - 14x + 5 &= 0 \\
x &= \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5}}{12} \\
&= \frac{14 \pm \sqrt{76}}{12} \\
&= \frac{14 \pm 2\sqrt{19}}{12} \\
&= \frac{7 \pm \sqrt{19}}{6}
\end{aligned}$$

1p (yht. 11p)

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) \\
&= -14 \\
f(3) &= 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 \\
&= 6 \\
f\left(\frac{7+\sqrt{19}}{6}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{7+\sqrt{19}}{6}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{7+\sqrt{19}}{6}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{7+\sqrt{19}}{6}\right) \\
&= -2{,}0522\ldots \\
f\left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{7-\sqrt{19}}{6}\right) \\
&= 1{,}10151\ldots
\end{aligned}$$

Näistä suurin on $f(3) = 6$. Funktion suurin arvo on siis $f(3) = 6$. 1p (yht. 12p)