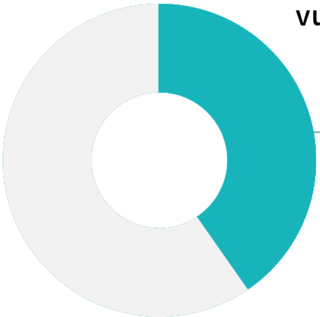
YO-MALLIVASTAUKSET

LYHYT MATEMATIIKKA KEVÄT 2019

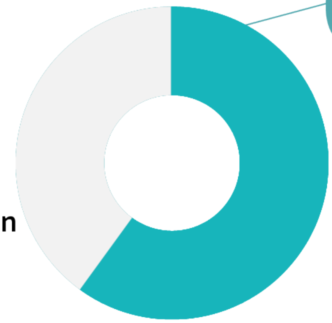
Tiesitkö tämän?



Mafylaiset veivät vuoden 2018 haussa

40 %

kaikista lääketieteellisten opiskelupaikoista.



60 %

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti ja Teemu perustivat MAFY:n vuonna 2008. Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ennen MAFY:n perustamista ja Antti työskenteli tunti-opettajana TKK:lla.

Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista PK-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetin oppimateriaalien kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Timo Kalinainen, Tuomas Hauvala ja Katja Niemistö.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

KÄYTTÖEHDOT

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:

1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1 ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ (2 p.)

1.6. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ (2 p.)

Ratkaisu. Lasketaan jokaisesta lukujonosta neljä ensimmäistä jäsentä ja valitaan oikea vastausvaihtoehto:

1.1. $a_n = 2n - 1$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \cdot 1 - 1 &&= 1 \\
a_2 &= 2 \cdot 2 - 1 &&= 3 \\
a_3 &= 2 \cdot 3 - 1 &&= 5 \\
a_4 &= 2 \cdot 4 - 1 &&= 7
\end{aligned}
$$

Vastaus: C. (1, 3, 5, 7, . . .) 2p

1.2. $a_n = n^2$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 &&= 1 \\ a_2 &= 2^2 &&= 4 \\ a_3 &= 3^2 &&= 9 \\ a_4 &= 4^2 &&= 16 \end{aligned}$$

Vastaus: D. (1, 4, 9, 16, ...) 2p(4p)

1.3. $a_n = n^3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^3 &&= 1 \\ a_2 &= 2^3 &&= 8 \\ a_3 &= 3^3 &&= 27 \\ a_4 &= 4^3 &&= 64 \end{aligned}$$

Vastaus: E. (1, 8, 27, 64, ...) 2p(6p)

1.4. $a_n = 2^n$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^1 &&= 2 \\ a_2 &= 2^2 &&= 4 \\ a_3 &= 2^3 &&= 8 \\ a_4 &= 2^4 &&= 16 \end{aligned}$$

Vastaus: G. (2, 4, 8, 16, ...) 2p(8p)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a_1 & & = 2 \\ a_2 & = 2 + 2 & = 4 \\ a_3 & = 4 + 2 & = 6 \\ a_4 & = 6 + 2 & = 8 \end{aligned}$$

Vastaus: F. (2, 4, 6, 8, . . .)

2p (10p)

1.6. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$

$$\begin{aligned} a_1 & & = 1 \\ a_2 & & = 2 \\ a_3 & = 1 + 2 & = 3 \\ a_4 & = 2 + 3 & = 5 \end{aligned}$$

Vastaus: B. (1, 2, 3, 5, . . .)

2p (12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

2. Paraabelien huiput (12 p.)

Määritä seuraavien paraabelien huippujen x- ja y-koordinaatit. Vastaukset voi antaa vain tekstimuodossa. Vastauksia ei tarvitse perustella.
Anna vastaukset muodossa ”$x =$ ____, $y =$ ____”.

2.1. $y = 2x^2 + 1$ (4 p.)

2.2. $y = x^2 - 2x$ (4 p.)

2.3. $y = 3(x - 5)^2 + 7$ (4 p.)

Ratkaisu.

Pisteytys: Kustakin x-koordinaatista 2 pistettä ja kustakin y-koordinaatista 2 pistettä.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Paraabelin $y = 2x^2$ huippu on origossa, eli x-akselin kohdassa $x = 0$. Tehtävässä annetun paraabelin $y = 2x^2 + 1$ huippu on myös $x = 0$, koska sen yhtälö eroaa yhtälöstä $y = 2x^2$ vain vakiotermin osalta. Paraabelien huiput sijaitsevat samassa x-akselin kohdassa, koska paraabeli $y = 2x^2 + 1$ saadaan siirtämällä paraabelia $y = 2x^2$ vakiotermin, eli yhden yksikön verran ylöspäin.

Lasketaan huipun y-koordinaatti.

$$y = 2x^2 + 1 = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

Vastaus: $x = 0$, $y = 1$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tässä ratkaisussa käytetään derivointia, joka kuuluu uudessa LOPS:ssa vasta syventävään kurssiin MAB7.

Derivoidaan paraabelin lauseke

$$\mathrm{D}(2x^2 + 1) = 2 \cdot 2x = 4x.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} 4x &= 0 \quad \| : 4 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Paraabelin huippu sijaitsee derivaatan nollakohdassa. Lasketaan huipun y-koordinaatti.

$$y = 2x^2 + 1 = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

Vastaus: $x = 0$, $y = 1$.

2.2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Etsitään paraabelin lausekkeen nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0$$

tai

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Huom! Nollakohdat voi ratkaista myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla yhtälöstä $x^2 - 2x = 0$.

Paraabelin huippu on nollakohtien puolivälissä. Lasketaan puolivälin paikka, eli nollakohtien keskiarvo.

$$x = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Lasketaan huipun y-koordinaatti.

$$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1.$$

Vastaus: $x = 1$, $y = -1$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tässä ratkaisutavassa käytetään derivointia, joka kuuluu uudessa LOPS:ssa vasta syventävään kurssiin MAB7.

Derivoidaan paraabelin lauseke.

$$\mathrm{D}(x^2 - 2x) = 2x - 2.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0 \\ 2x = 2 &= 0 \quad \| : 2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Paraabelin huippu sijaitsee derivaatan nollakohdassa. Lasketaan huipun y-koordinaatti.

$$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1.$$

Vastaus: $x = 1$, $y = -1$.

2.3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Jos yrität ratkaista paraabelin nollakohdat esim. toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, voit todeta, että ratkaisuja ei löydy. Paraabelin lauseke $3(x + 5)^2 + 7$ saa vain positiivisia arvoja, koska $(x - 5)^2$ on toisen potenssin vuoksi aina positiivinen tai nolla. Näin ollen paraabelilla ei ole nollakohtia. Huippu täytyy siis selvittää jotenkin toisin kuin nollakohtia hyödyntämällä.

Paraabeli $y = 3(x - 5)^2 + 7$ saadaan paraabelista $y = 3(x - 5)^2$ siirtämällä sitä seitsemän yksikköä ylöspäin (paraabelien lausekkeet eroavat vain termin $+7$ osalta). Näin ollen niiden huiput sijaitsevat samassa x-akselin kohdassa.

Selvitetään paraabelin $y = 3(x - 5)^2$ huipun x-koordinaatti. Ratkaistaan paraabelin lausekkeen nollakohdat:

$$\begin{aligned} 3(x - 5)^2 &= 0 \quad \| : 3 \\ (x - 5)^2 &= 0 \\ x - 5 &= 0 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Nollakohdat (nollakohdan) voi ratkaista myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla yhtälöstä $(x-5)^2 = 0$. Lauseke $(x-5)^2$ täytyy ensin laskea auki, jotta yhtälön saa normaalimuotoon $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Nollakohtia on vain yksi, joten paraabeli sivuaa x-akselia. Paraabelin $y = 3(x-5)^2$ huippu on sen ainoassa nollakohdassa $x = 5$.

Paraabelin $y = 3(x-5)^2 + 7$ huippu on samassa x-akselin kohdassa. Ratkaistaan tämän paraabelin huipun y-koordinaatti.

$$y = 3(x-5)^2 + 7 = 3 \cdot (5-5)^2 + 7 = 7.$$

Vastaus: $x = 5$, $x = 7$.

$\boxed{\text{RATKAISUTAPA 2}}$

Tässä ratkaistavassa käytetään derivointia, joka kuuluu uudessa LOPS:ssa vasta syventävään kurssiin MAB7.

Muokataan paraabelin lauseke helpommin derivoitavaan muotoon.

$$3(x-5)^2 + 7 = 3(x^2 - 10x + 25) + 7$$

Yllä käytettiin muistikaavaa $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} &= 3x^2 - 3 \cdot 10x + 3 \cdot 25 + 7 \\ &= 3x^2 - 30x + 75 + 7 \\ &= 3x^2 - 30x + 82. \end{aligned}$$

Derivoidaan paraabelin lauseke.

$$\mathrm{D}(3x^2 - 30x + 82) = 3 \cdot 2x - 30 = 6x - 30.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} 6x - 30 &= 0 \\ 6x &= 30 \quad \| : 6 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Paraabelin huippu sijaitsee derivaatan nollakohdassa. Lasketaan huipun y-koordinaatti.

$$y = 3(x-5)^2 + 7 = 3 \cdot (5-5)^2 + 7 = 7.$$

Vastaus: $x = 5$, $y = 7$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

3. Värikäs lippu (12 p.)

Aineisto:

3.A Kuva: Seychellien lippu

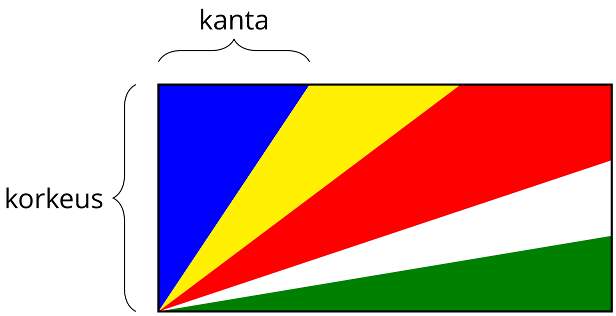
Seychellien lipussa on viisi eri väriä kuvan 3.A mukaisesti. Kuinka monta prosenttia kukin väri peittää koko lipun pinta-alasta?

Ratkaisu.

Lasketaan aluksi koko lipun pinta-ala A_{lippu}. Lippu on suorakulmio, joten sen pinta-ala on kanta kertaa korkeus:

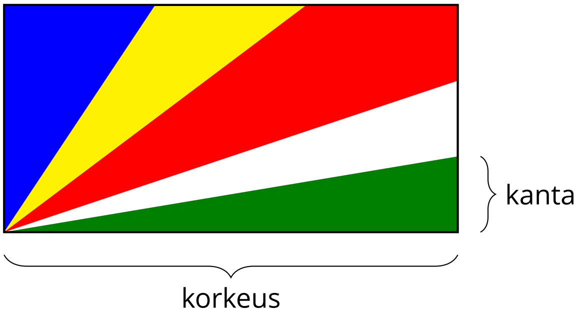
$$A_{\text{lippu}} = 300 \cdot 150 = 45\,000$$

Sininen, keltainen, valkoinen ja vihreä alue ovat kaikki kolmioita. Kolmion pinta-ala on kanta kertaa korkeus jaettuna kahdella. Sinisen ja keltaisen kolmion korkeudet ovat yhtä suuret kuin lipun korkeus eli 150. Kummankin kannan leveys on 100. Näiden kolmioiden pinta-alat ovat siis:



$$A_{\text{sin.}} = A_{\text{kelt.}} = \frac{100 \cdot 150}{2} = \frac{15\,000}{2} = 7\,500$$ 3p

Valkoisen ja vihreän kolmion kannattaa ajatella olevan kyljellään. Tällöin niiden korkeus on sama kuin lipun leveys eli 300 ja kummankin kannan leveys on 50. Niiden pinta-alat ovat siis:

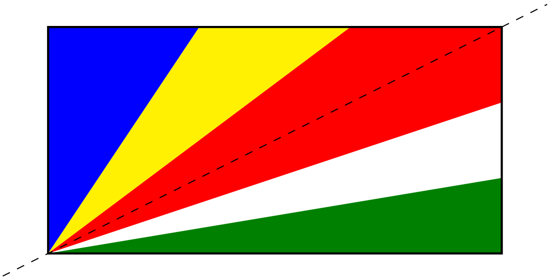


$$A_{\text{valk.}} = A_{\text{vihr.}} = \frac{300 \cdot 50}{2} = \frac{15\,000}{2} = 7\,500$$ 3p(6p)

Punaisen alueen pinta-ala saadaan koko lipun pinta-alan ja muiden värien erotuksena:

$$\begin{aligned} A_{\text{pun.}} &= A_{\text{lippu}} - A_{\text{sin.}} - A_{\text{kelt.}} - A_{\text{valk.}} - A_{\text{vihr.}} \\ &= 45\,000 - 4 \cdot 7\,500 \\ &= 15\,000 \end{aligned}$$ 2p(8p)

Vaihtoehtoisesti punaisen värin peittämän alueen pinta-alan voi laskea jakamalla sen kahteen kolmioon lipun oikeasta yläkulmasta vasempaan alakulmaan menevällä suoralla:



Nyt voidaan laskea kuinka monta prosenttia kukin väri peittää lipun pinta-alasta. Sininen, keltainen, valkoinen ja vihreä peittävät kukin

$$\frac{7\,500}{45\,000} = \frac{75}{450} = \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$$ 1p(9p)

eli noin $16{,}7$ prosenttia lipun pinta-alasta. Punainen väri puolestaan peittää 1p(10p)

$$\frac{15\,000}{45\,000} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$$ 1p(11p)

eli noin $33{,}3$ prosenttia lipun pinta-alasta. 1p(12p)

Vastaus: Sininen, keltainen, valkoinen ja vihreä peittävät kukin $16{,}7$ prosenttia lipun pinta-alasta. Punainen väri peittää $33{,}3$ prosenttia lipun pinta-alasta.

Huom! Kuvat ja värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

4. Tilastokysymyksiä nopanheitosta (12 p.)

Aineisto:

4.A Kuva: Nopat

Heitettiin 30 noppaa, ja saatiin kuvan 4.A mukainen tulos, jota kutsutaan tässä tehtävässä aineistoksi.

4.1. Muodosta aineiston perusteella frekvenssitaulukko. Voit laatia taulukon kaavaeditorin taulukko-ominaisuudella tai pelkkänä tekstinä. (2 p.)

4.2. Mikä on aineiston moodi? Perustele lyhyesti vastauksesi. (2 p.)

4.3. Mikä on aineiston mediaani? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)

4.4. Mikä on aineiston keskiarvo? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)

4.5. Mikä on silmäluvun 6 tilastollinen todennäköisyys tässä aineistossa? (2 p.)

Ratkaisu.

4.1. Tutkitaan kuvassa 4.A esiintyvien silmälukujen (1-6) lukumääriä. Muuttujien arvoille (silmäluvut) saadaan esiintymiskertojen määristä seuraava frekvenssitaulukko:

Silmäluku x	f (frekvenssi)
1	5
2	2
3	5
4	8
5	8
6	2

2p

4.2. Tyyppiarvo eli moodi on yleisin muuttujan arvo, eli se, jonka frekvenssi on suurin. Edellisen kohdan taulukosta nähdään, että silmäluvuilla 4 ja 5 on suurin frekvenssi ($f = 8$), joten tyyppiarvoja on kaksi, silmäluvut 4 ja 5.

Vastaus: Moodeja ovat silmäluvut 4 ja 5.

2p(4p)

4.3. Silmäluvut suuruusjärjestyksessä

$$1,1,1,1,1,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,6 \quad \text{ja} \quad 6.$$ 1p(5p)

Silmälukuja on yhteensä 30 kpl, joten suuruusjärjestyksessä keskimmäinen arvo eli mediaani on järjestetyn aineiston $15.$ ja $16.$ arvon keskiarvo. Molemmat ovat silmälukuja 4, joten niiden keskiarvo on 4. 2p(7p)

Vastaus: Mediaani on 4.

4.4. Lasketaan keskiarvo frekvenssien avulla

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 1 + 2\cdot 2 + 5\cdot 3 + 8\cdot 4 + 8\cdot 5 + 2\cdot 6}{30} = \frac{108}{30} = 3{,}6.$$ 3p (10p)

Vastaus: Keskiarvo on $3{,}6$.

4.5. Silmäluvun 6 tilastollinen todennäköisyys saadaan silmäluvun 6 suhteellisesta frekvenssistä. Aineiston perusteella silmäluku 6 esiintyy tilastollisella todennäköisyydellä

$$P(x=6) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$$

Vastaus: Silmäluvun 6 tilastollinen todennäköisyys on $\frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$. 2p (12p)

5. Paljonko tölkissä on ilmaa? (12 p.)

Aineisto:

5.A Kuva: Maitotölkki

Maitotölkki (aineisto 5.A) sisältää $1{,}75$ litraa maitoa. Tölkin pohja on neliö, jonka sivun pituus on $9{,}25\,\mathrm{cm}$. Tölkin sisäosan kokonaiskorkeus on $23{,}0\,\mathrm{cm}$, ja sen alaosa koostuu suorakulmaisesta särmiöstä, jonka korkeus on $20{,}0\,\mathrm{cm}$. Tölkin yläosa muodostuu pyramidista. Kuinka paljon ilmaa on avaamattomassa maitotölkissä?

Ratkaisu.

Tarkastellaan tölkkiä kahdessa osassa: alla oleva suorakulmaisen särmiön muotoinen osa (korkeus h_1, pohjan sivun pituus a) ja päällä oleva pyramidin muotoinen osa (korkeus h_2).

$$\begin{aligned} a &= 9{,}25\,\mathrm{cm} \\ h_1 &= 20\,\mathrm{cm} \\ h_2 &= 23\,\mathrm{cm} - 20\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm} \\ V_{\text{maito}} &= 1{,}75\,\mathrm{l} = 1750\,\mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

2p

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on

$$V_1 = a^2 h_1.$$

2p(4p)

Pyramidin tilavuus on

$$V_2 = \frac{1}{3} a^2 h_2.$$

2p(6p)

Tölkin kokonaistilavuus on siis

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= a^2 h_1 + \frac{1}{3} a^2 h_2 \\ &= 1796{,}8125\,\mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

4p (10p)

Ilman tilavuus tölkissä on siis

$$\begin{aligned} V_{\text{ilma}} &= V - V_{\text{maito}} \\ &= 468125\,\mathrm{cm}^3 \\ &\approx 47\,\mathrm{cm}^3. \end{aligned}$$

Vastaus: Avaamattomassa tölkissä on $47\,\mathrm{cm}^3$ ilmaa.

2p (12p)

6. Puun kasvu (12 p.)

Metsäntutkija mallintaa puun kasvua. Mallissa puunrunko ajatellaan suoraksi ympyräpohjaiseksi kartioksi. Ajanhetkellä $t = 0$ puunrunko on korkeudeltaan 6 metriä ja tyvestä halkaisijaltaan $8\,\mathrm{cm}$ paksu. Joka vuosi puu kasvaa pituutta $45\,\mathrm{cm}$ ja tyven halkaisija kasvaa $0{,}6\,\mathrm{cm}$. Muodosta funktio, joka kuvaa puunrungon tilavuutta ajan funktiona. Mikä on rungon tilavuus 20 vuoden kuluttua?

Ratkaisu.

Määritetään puun tyven säteelle funktio $r(t)$ ajan t suhteen. Alussa halkaisija on $8\,\mathrm{cm}$, eli sen säde on $8\,\mathrm{cm}/2 = 4\,\mathrm{cm}$. Halkaisija kasvaa joka vuosi $0{,}6\,\mathrm{cm}$, jolloin säde kasvaa $0{,}6\,\mathrm{cm}/2 = 0{,}3\,\mathrm{cm}$. Säteelle (senttimetreissä) saadaan funktio

$$r(t) = 4 + 0{,}3 \cdot t.$$

3p

Määritetään sitten puun korkeudelle funktio $h(t)$. Alussa korkeus on $6\,\mathrm{m} = 600\,\mathrm{cm}$. Korkeus kasvaa joka vuosi $45\,\mathrm{cm}$, joten korkeudelle (senttimetreissä) saadaan funktio

$$h(t) = 600 + 45 \cdot t.$$

2p(5p)

Ympyräpohjaisen kartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Sijoitetaan ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(\pi r^2)h \\ V &= \frac{\pi}{3}r^2 h, \end{aligned}$$

missä r on pohjaympyrän säde ja h on kartion korkeus. Sijoitetaan säde ja korkeus ajan funktiona, jolloin saadaan puunrungon tilavuudelle funktio

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\pi}{3} \cdot (r(t))^2 \cdot h(t) \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot (4 + 0{,}3 \cdot t)^2 \cdot (600 + 45 \cdot t) \end{aligned}$$

4p(9p)

Rungon tilavuus 20 vuoden kuluttua on

$$\begin{aligned} V(20) &= 157\,079{,}63\ldots \\ &\approx 157\,000\,(\mathrm{cm}^3). \end{aligned}$$

3p (12p)

Vastaus: Rungon tilavuuden funktio on $V(t) = \frac{\pi}{3} \cdot (4 + 0{,}3 \cdot t)^2 \cdot (600 + 45 \cdot t)$, missä t on aika vuosissa ja V on tilavuus kuutiosentteinä. Tilavuus 20 vuoden kuluttua on $157\,000\,\mathrm{cm}^3$.

Vastaukseksi käy myös sievempi muoto $V(t) = \pi \cdot (0{,}3t + 4)^2 \cdot (15t + 200)$,

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

7. Mikko vaihtaa rahaa (12 p.)

Mikko lähtee matkalle Varsovaan ja Prahaan. Hän joutuu vaihtamaan rahaa useita kertoja ennen matkaa ja matkan aikana. Jokaisessa vaihdossa hän menettää vaihtotappiona 5 prosenttia rahan arvosta. Hän vaihtaa 300 euroa Puolan złotyiksi ja 200 euroa Tšekin korunoiksi. Hän ei muista, millä kurssilla vaihto suoritettiin, mutta pitää kirjaa siitä, kuinka suuri osuus rahoista tulee käytettyä.
Puolassa hän huomaa, että kolmasosa złoteista on jäänyt käyttämättä, ja hän vaihtaa ne lähtiessään Tšekin korunoiksi. Kotiin tullessaan hänellä on vielä viidesosa kaikista korunoista jäljellä, ja hän vaihtaa ne takaisin euroiksi.
Kuinka monta euroa hän saa takaisin? Anna vastaus euron tarkkuudella.

Ratkaisu.

Tehtävässä pyydetään vastaus vain euron tarkkuudella, joten ei tarvitse välittää välitulosten pyöristyksistä senttien tarkkuuteen.

Alunperin złotyiksi vaihtuva rahamäärä on $z = 300\,€$.
Alunperin korunoiksi vaihtuva rahamäärä on $k = 200\,€$. 1p

Ensimmäisen valuutanvaihdon $5\,\%$:n vaihtotappion jälkeen jäljellä oleva arvo euroissa on

$$0{,}95 \cdot z + 0{,}95 \cdot k = 475\,€.$$ 2p(3p)

Puolassa jää jäljelle kolmasosa zlotyistä, joten jäljellä oleva arvo on

$$\frac{0{,}95z}{3} + 0{,}95k = 285\,€.$$ 2p(5p)

Loput złotyt vaihdetaan $5\,\%$:n vaihtotappiolla korunoiksi, joten jäljellä oleva arvo on

$$\frac{0{,}95z}{3} \cdot 0{,}95 + 0{,}95k = 280{,}25\,€.$$ 3p(8p)

Tsekeissä rahaa kuluu niin, että jäljelle jää viidesosa valuutasta, joten jäljellä oleva arvo on

$$\frac{\frac{0{,}95z}{3} \cdot 0{,}95 + 0{,}95k}{5} = 56{,}05\,€$$ 2p (10p)

Viimeisen valuutanvaihdon $5\,\%$:n tappion jälkeen arvoksi jää

$$\left(\frac{\frac{0{,}95z}{3} \cdot 0{,}95 + 0{,}95k}{5}\right) \cdot 0{,}95 = 0{,}95^2 \cdot \frac{\frac{0{,}95z}{3} + k}{5} \approx 53{,}25\,€.$$ 1p (11p)

Sijoitetaan $z = 300\,€$ ja $k = 200\,€$, saadaan

$$0{,}95^2 \cdot \frac{\frac{0{,}95 \cdot 300}{3} + 200}{5} = 53{,}2474 \approx 53\,(€)$$ 1p (12p)

Vastaus: Mikko saa takaisin 53 euroa. Välituloksia ei ole pakko olla näkyvissä.

Huom! Tehtävänannossa pyydettiin vastaus juuri euron tarkkuudella, joten jos on antanut vastauksen muulla tarkkuudella, menettää 1p.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

8. Lukujonon kasvaminen ja väheneminen (12 p.)

Tarkastellaan lukuja

$$a_n = -n^3 + 1000n^2 + 100n + 2019,$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 1000$. Etsi derivaatan avulla sellainen indeksin k arvo, että lukujono $(a_0, \ldots, a_k)$ on kasvava ja lukujono $(a_k, \ldots, a_{1000})$ on vähenevä.

Ratkaisu.

Lukujonon jäsenet ovat

$$a_n = -n^3 + 1000n^2 + 100n + 2019.$$

Tutkitaan sellaista jatkuvaa funktiota $f(x)$ välillä $[0, 1000]$, jonka arvot ovat samat kuin lukujonon jäsenet kokonaislukujen kohdalla.

$$f(x) = -x^3 + 1000x^2 + 100x + 2019.$$ 1p

Derivoidaan f.

$$f'(x) = -3x^2 + 2000x + 100.$$ 2p(3p)

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 2000x + 100 &= 0 \end{aligned}$$

CAS-ohjelmalla:

$$x = -0{,}0499\ldots \quad \text{tai} \quad x = 666{,}71\ldots$$

Negatiivinen nollakohta ei ole tutkittavalla alueella. Lasketaan derivaatan arvo positiivisen nollakohdan molemmin puolin.

$$\begin{aligned} f'(0) &= 100 > 0 \\ f'(700) &= -69900 < 0. \end{aligned}$$ 2p(5p)

Funktio on siis kasvava välillä $[0, 666{,}71\ldots]$ ja vähenevä välillä $[666{,}71\ldots, 1000]$. 3p(8p)

Funktio kuvaa lukujonon kulkua vain x:n kokonaislukuarvoilla, joten kohta, jossa lukujono vaihtuu kasvavasta väheneväksi on a_{666} tai a_{667}. Lasketaan nämä jäsenet: 1p(9p)

$$\begin{aligned} a_{666} &= 148216323 \\ a_{667} &= 148216756. \end{aligned}$$ 1p(10p)

Vastaus: Indeksin arvolla $k = 667$ lukujono $(a_0, \ldots, a_k)$ on kasvava ja $(a_k, \ldots, a_{1000})$ on vähenevä. 2p(12p)

9. Vuorovesimalli / Ennätyslämmin heinäkuu (12 p.)

Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1. TAI 9.2. (Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaisesti olet opiskellut.)

9.1. (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)
Vuoroveden korkeutta kellonajan t (yksikkönä tunti, $t = 0$ keskiyöllä) funktiona voidaan kuvata funktion

$$f(t) = A + B\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(t - t_0)\right)$$

avulla. Tässä A, B ja t_0 ovat vakioita. Norjan Tromssassa merenpinta on eräänä päivänä kello 9.00 matalimmillaan. Seuraavan kerran merenpinta on matalimmillaan samana päivänä kello 21.24. Korkeimmillaan merenpinnan korkeus näin kuvattuna on $192\,\mathrm{cm}$ ja matalimmillaan $0\,\mathrm{cm}$.
Määritä näiden tietojen avulla funktion $f(t)$ lausekkeessa esiintyvien vakioiden arvot. Anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu.

Merenpinnan korkeus on pienimmillään, kun

$$\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(t - t_0)\right) = -1$$ 1p

Saadaan siis

$$\begin{aligned} A + B\cdot(-1) &= 0 \\ A - B &= 0 \\ A &= B. \end{aligned}$$ 1p(2p)

Merenpinta on korkeimmillaan, kun

$$\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(t - t_0)\right) = 1.$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned} A + B\cdot 1 &= 192 \quad \|\text{Sij. } A = B \\ A + A &= 192 \\ 2A &= 192 \quad \| : 2 \\ A &= 96 \qquad \text{(ja vastaavasti } B = 96) \end{aligned}$$

2p(4p)
1p(5p)
1p(6p)

Merenpinta on matalimmillaan ensimmäisen kerran, kun $t = 9$. Tällöin siis

$$\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(9 - t_0)\right) = -1 \qquad \text{2p(8p)}$$

$$\frac{2\pi}{12{,}4}(9 - t_0) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{3p(11p)}$$

$$t_0 = 12{,}1.$$

Vastaus: Vakioiden arvot ovat siis

$$A = B = 96{,}0\,\text{cm}$$

$$t_0 = 12{,}1\,\text{h}. \qquad \text{1p(12p)}$$

Vakioiden arvot kannattaa ilmoittaa yksiköineen, koska ne kuuluvat vastaukseen. Jos unohdit vastauksestasi yksiköt, saat luultavasti kuitenkin täydet pisteet, koska YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2019) ei ollut yksiköitä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

9.2. (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)
Aineisto:

9.A Teksti: Ilmasto-opas

Ilmasto-oppaan (aineisto 9.A) perusteella oletetaan, että vuoden 2010 tyyppisen ennätyslämpimän heinäkuun todennäköisyys on joka vuosi $\frac{1}{60}$. Tapahtumat oletetaan myös toisistaan riippumattomiksi. Kuinka suurella todennäköisyydellä Suomessa

- ei ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (4 p.)
- on vähintään kaksi ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (8 p.)

Ratkaisu.

Todennäköisyys, että tiettynä vuonna on ennätyslämmin heinäkuu, on

$$p = \frac{1}{60}.$$ 1p

Vuodet oletetaan toisistaan riippumattomiksi, joten kyseessä on toistokoe. 1p(2p)
Todennäköisyys, ettei yhtenäkään vuonna 30 vuoden aikana ole ennätyslämmintä on

$$\begin{aligned} P(0\,\mathrm{kpl}) &= \binom{30}{0} p^0 (1-p)^{30} \\ &= 0{,}60398\ldots \\ &\approx 60\%. \end{aligned}$$ 2p(4p)

Todennäköisyys, että on vähintään kaksi ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavan 30 vuoden aikana on

$$\begin{aligned} P(> 1\,\mathrm{kpl}) &= 1 - P(< 2\,\mathrm{kpl}) \\ &= 1 - P(1\,\mathrm{kpl}) - P(0\,\mathrm{kpl}). \end{aligned}$$ 1p(5p)

Lasketaan $P(1\,\mathrm{kpl})$ toistokokeen kaavalla:

$$P(1\,\mathrm{kpl}) = \binom{30}{1} p^1 (1-p)^{30-1}$$ 4p(9p)

$$= 0{,}30710\ldots$$ 2p(11p)

Kysytty todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} P(> 1\,\mathrm{kpl}) &= 1 - 0{,}60398\ldots - 0{,}30710\ldots \\ &= 0{,}088910\ldots \\ &\approx 8{,}9\%. \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, ettei seuraavan 30 vuoden aikana ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta on 60% ja todennäköisyys, että seuraavan 30 vuoden aikana on vähintään kaksi ennätyslämmintä heinäkuuta on $8{,}9\%$. 1p(12p)

Vastaukseksi käyvät myös $0{,}60$ ja $0{,}089$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

10. Miten vauva kasvaa? (12 p.)

Vauvan painon voidaan arvioida kasvavan q^3-kertaiseksi, kun vauvan pituus kasvaa q-kertaiseksi. Tämä perustuu siihen, että vauva on kolmiulotteinen ja kasvua tapahtuu suurin piirtein yhtä paljon jokaiseen suuntaan. Oletetaan, että vauva on syntyessään $52\,\mathrm{cm}$ pitkä ja painaa $4{,}0$ kilogrammaa.

10.1. Arvioi vauvan painoa tällä menetelmällä, kun vauvan pituus on 55, 60, 65 ja $70\,\mathrm{cm}$. (4 p.)

10.2. Piirrä kuvaaja, josta ilmenevät syntymämitat ja kohdassa 10.1. lasketut tiedot. (4 p.)

10.3. Voiko samaa arviointitapaa käyttää aikuiseksi asti? Valota esimerkeillä ja perustele, miksi uskot menetelmän toimivan tai olevan toimimatta. (4 p.)

Ratkaisu.

10.1. Vauvan painon oletetaan olevan verrannollinen vauvan pituuden kuutioon eli kolmanteen potenssiin. Merkitään vauvan pituutta h:lla ja painoa (joka on siis pituuden funktio) $p(h)$:lla. Tällöin vauvan paino on $p(h) = a \cdot h^3$, missä a on verrannollisuuskerroin. Lasketaan verrannollisuuskertoimen arvo vauvan syntymäpituuden ja -painon perusteella.

$$
\begin{aligned}
p(h) &= a \cdot h^3 \\
4{,}0\,\mathrm{kg} &= a \cdot (0{,}52\,\mathrm{m})^3 \\
a &= \frac{4{,}0\,\mathrm{kg}}{(0{,}52\,\mathrm{m})^3} \\
&= \frac{4{,}0\,\mathrm{kg}}{0{,}140608\,\mathrm{m}^3} \\
&= 28{,}44788\ldots\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}
\end{aligned}
$$

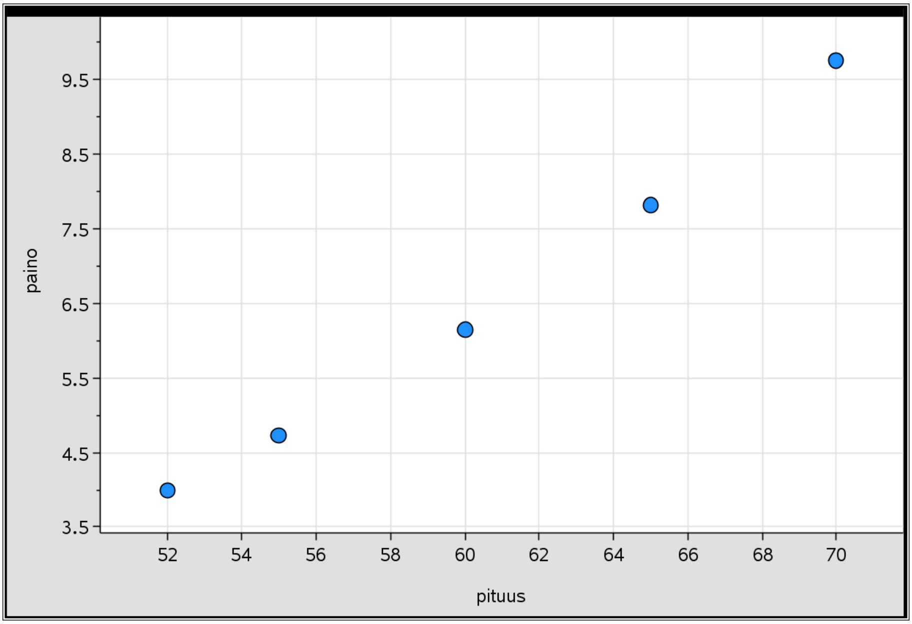
2p

Lasketaan nyt arviot vauvan painolle tehtävänannossa annetuille pituuksille:

Pituus	$p(h)$	
$55\,\mathrm{cm}$	$28{,}44788\ldots \cdot (0{,}55)^3$	$\approx 4{,}7\,\mathrm{kg}$
$60\,\mathrm{cm}$	$28{,}44788\ldots \cdot (0{,}60)^3$	$\approx 6{,}1\,\mathrm{kg}$
$65\,\mathrm{cm}$	$28{,}44788\ldots \cdot (0{,}65)^3$	$\approx 7{,}8\,\mathrm{kg}$
$70\,\mathrm{cm}$	$28{,}44788\ldots \cdot (0{,}70)^3$	$\approx 9{,}8\,\mathrm{kg}$

2p(4p)

10.2. Piirretään kysytty kuva. Merkitään kuvaan syntymäpaino ja -pituus sekä arvioidut painot annetuilla pituuksilla:



Kuvaajan pisteytys:
- Kuvaajassa on viisi pistettä ja akselit on nimetty. 1p (5p)
- Pisteet on merkitty oikein. 3p (8p)

10.3. Arvioidaan aikuisen ihmisen painoa kohdassa 10.1. tehdyllä mallilla. Suomalaisten keskipituus on noin 1,72 metriä (voi käyttää muutakin pituutta esimerkiksi välillä 1,65-1,80 metriä). Käytetty malli ennustaa tällaisen ihmisen painoksi

$$p(h) = 28{,}44788\ldots \cdot (1{,}72)^3 \approx 144{,}8\,\mathrm{kg}$$

mikä on epärealistisen suuri tulos ihmisen keskipainoksi. 2p(10p)

Malli ei selitä aikuisten ihmisten painon ja pituuden suhdetta, sillä aikuisen kehon mittasuhteet ovat erilaiset kuin vauvalla. 2p(12p)

Vastaus: Tämä malli ei anna realistista arviota aikuisen ihmisen painosta.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

11. Harrin palkka (12 p.)

Harri saa palkkaa $4\,200$ euroa kuukaudessa ja hänen työtuntimääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: Jos työtuntimääräni olisi 160 tuntia ja palkkani $4\,000$ euroa, niin tuntipalkkani olisi $4\,000/160 = 25$. Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)

11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

Ratkaisu.

11.1. Lasketaan Harrin oikea tuntipalkka:

$$\frac{4\,200\,€}{155\,\mathrm{h}} = 27{,}096774\ldots \approx 27{,}10\ €/\mathrm{h}$$ 2p

Harri arvioi saavansa $27\,€$ tunnilta. Lasketaan arvion ja todellisen tuntipalkan erotus ja verrataan tätä oikeaan tuntipalkkaan:

$$\begin{aligned}\frac{27\,€ - 27{,}096\ldots\ €}{27{,}096\ldots\ €} &= \frac{-0{,}096\ldots\ €}{27{,}096\ldots\ €}\\ &= -0{,}00357\ldots\\ &\approx -0{,}36\ \%\end{aligned}$$

Vastaus: Harri arvioi saavansa palkkaa n. 0,36 prosenttia vähemmän kuin hän oikeasti saa. 2p(4p)

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä on verrattu Harrin tuntipalkka-arvioon perustuvaa kuukausipalkka-arviota oikeaan kuukausipalkkaan. Tehtävässä käskettiin kuitenkin vertailla arvioitua ja todellista tuntipalkkaa.

11.2. Arvioinnin ensimmäisessä vaiheessa Harri pyöristää palkan lähimpään tuhatlukuun ja työtunnit lähimpään kymmeneen ja laskee tuntipalkan näillä luvuilla.

Tämän jälkeen Harri arvioi, että palkan loppuosa $200\,€$ kasvattaa tuntipalkkaa noin eurolla. Tämä arvio on realistinen mutta aliarvioi tuntipalkkaa hieman, sillä

$$\frac{200\,€}{160\,\mathrm{h}} = 1{,}25\ €/\mathrm{h}$$ 2p(6p)

Tähän asti Harri on käyttänyt arvioissaan tuntimäärää 160 oikean 155:n sijasta. Näiden lukujen suhde on

$$\frac{160\,\mathrm{h}}{155\,\mathrm{h}} = 1{,}032258\ldots$$

Jos Harrin arvioiman 26 euron tuntipalkan kertoo tällä suhdeluvulla, saadaan uudeksi arvioksi

$$26\ €/\mathrm{h} \cdot 1{,}032258\ldots = 26{,}8387\ldots\ €/\mathrm{h}$$

mikä pyöristyy 27 euroon tunnilta. 3p(9p)

Ero tämän arvion ja oikean tuntipalkan välillä selittyy sillä, että aiemmin arvioitiin että 200 euroa nostaa tuntipalkkaa vain eurolla eikä $1{,}25$ eurolla. 2p (11p)

Harrin päättely perustuu päteviin arvioihin. 1p (12p)

Pisteytyksestä: Kohdan 11.2 perustelemisesta kohdan 11.1 avulla ei saa pisteitä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

12. Elisan laina (12 p.)

Aineisto:

12.A Taulukko: Lainan korko

Elisa otti aikanaan $100\,000$ euron suuruiselle kymmenen vuoden tasalyhennyslainalleen korkokaton. Pankista sai lainalle $4{,}5$ prosentin korkokaton $5\,000$ euron hintaan. Laina oli sidottu 12 kuukauden euriborkorkoon, joka vaihteli laina-aikana taulukon 12.A mukaan. Kaikki tehtävässä mainitut korkokannat sisältävät korkomarginaalin, ja lainaa lyhennetään kuukausittain.
Kannattiko Elisan ottaa lainalleen korkokattoa? Korkokaton sijaan hän olisi voinut sijoittaa $5\,000$ euroa säästötilille, jolloin talletuksen nykyinen arvo olisi $5\,700$ euroa. Muita rahan arvon muutoksia ei tarvitse huomioida.
Voit halutessasi esittää laskut taulukkolaskentaohjelmasta otetussa kuvakaappauksessa, kunhan vastauksesta selviää, miten tuloksiin on päästy.

Ratkaisu.

Elisan lainasumma oli $100\,000$ euroa ja lainaa lyhennettiin joka kuukausi kymmenen vuoden ajan. Kuukausittainen lainan lyhennys oli siis

$$k = \frac{100\,000\,€}{10 \cdot 12} = 833{,}333\ldots\,€ \approx 833{,}33\,€$$

Ensimmäisen kuuden vuoden aikana lainan korko oli alle $4{,}5$ % vuodessa, eli korkokatolla ei ollut mitään vaikutusta. Lasketaan Elisan maksamat korkokulut korkokaton kanssa ja ilman korkokattoa, jolloin Elisa olisi voinut sijoittaa säästämänsä $5000\,€$. 2p

KORKOKATON KANSSA

Tehdään taulukko, josta ilmenee vuosien 7 – 10 kuukausittain jäljellä oleva laina sekä tästä lainasta maksettavan koron määrä:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1									kuukausi						
2				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3															
4									Lainaa jäljellä:						
5	vuosi	korko													
6	7	4.5		40000	39166.7	38333.3	37500	36666.7	35833.4	35000	34166.7	33333.4	32500	31666.7	30833.4
7	8	4.5		30000	29166.7	28333.3	27500	26666.7	25833.4	25000	24166.7	23333.4	22500	21666.7	20833.4
8	9	4.5		20000	19166.7	18333.3	17500	16666.7	15833.4	15000	14166.7	13333.4	12500	11666.7	10833.4
9	10	4.5		10000	9166.67	8333.34	7500.01	6666.68	5833.35	5000.02	4166.69	3333.36	2500.03	1666.7	833.37
10															
11		40000	Lainasumma												
12		833.3	lyhennys						Korkokulut:						
13															
14				150.00	146.88	143.75	140.63	137.50	134.38	131.25	128.13	125.00	121.88	118.75	115.63
15				112.50	109.38	106.25	103.13	100.00	96.88	93.75	90.63	87.50	84.38	81.25	78.13
16				75.00	71.88	68.75	65.63	62.50	59.38	56.25	53.13	50.00	46.88	43.75	40.63
17				37.50	34.38	31.25	28.13	25.00	21.88	18.75	15.63	12.50	9.38	6.25	3.13
18															
19															
20	Korkokulut yhteensä:				3675.00	=SUMMA(D13:O16)									

Korkokulut olivat siis vuosilta 7 – 10 yhteensä $3675{,}00\,€$, kun Elisa otti pankilta lainalleen korkokaton. 5p(7p)

ILMAN KORKOKATTOA

Tehdään samanlainen taulukko, mutta korkokaton sijaan käytetään aineistossa annettuja korkoprosentteja:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1									kuukausi						
2				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3															
4									Lainaa jäljellä:						
5	vuosi	korko													
6	7	5.5		40000	39166.7	38333.3	37500	36666.7	35833.4	35000	34166.7	33333.4	32500	31666.7	30833.4
7	8	5.7		30000	29166.7	28333.3	27500	26666.7	25833.4	25000	24166.7	23333.4	22500	21666.7	20833.4
8	9	5		20000	19166.7	18333.3	17500	16666.7	15833.4	15000	14166.7	13333.4	12500	11666.7	10833.4
9	10	5.1		10000	9166.67	8333.34	7500.01	6666.68	5833.35	5000.02	4166.69	3333.36	2500.03	1666.7	833.37
10															
11		40000	Lainasumma												
12		833.3	lyhennys						Korkokulut:						
13															
14				183.33	179.51	175.69	171.88	168.06	164.24	160.42	156.60	152.78	148.96	145.14	141.32
15				142.50	138.54	134.58	130.63	126.67	122.71	118.75	114.79	110.83	106.88	102.92	98.96
16				83.33	79.86	76.39	72.92	69.44	65.97	62.50	59.03	55.56	52.08	48.61	45.14
17				42.50	38.96	35.42	31.88	28.33	24.79	21.25	17.71	14.17	10.63	7.08	3.54
18															
19															
20	Korkokulut yhteensä:				4443.75	=SUMMA(D13:O16)									

3p (10p)

Jos Elisa olisi ottanut pankilta korkokaton, hän olisi säästänyt siis korkokuluissa

$$4\,443{,}75\,€ - 3\,675{,}00\,€ = 768{,}75\,€.$$ 1p (11p)

Korkokaton hinta oli $5\ 000$ €. Sijoittamalla tämän summan laina-ajaksi säästötilille talletuksen nykyarvo olisi 5700 €. Kun Elisa otti korkokaton, hän menetti siis

$$5\,700\,€ - 768{,}75\,€ = 4\,931{,}25\,€.$$

Vastaus: Elisan ei olisi kannattanut ottaa lainalleen korkokattoa. 1p (12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

13. Polynomifunktioita (12 p.)

Tutkitaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 2$ määriteltyjä polynomifunktioita $p(x)$.

13.1. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, jonka ainoa maksimikohta on avoimella välillä $-1 < x < 2$. (6 p.)

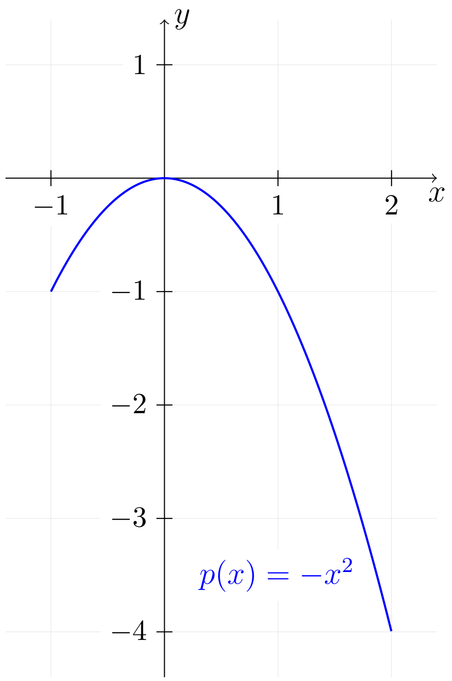
13.2. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, joka saavuttaa suurimman arvonsa välin molemmissa päätepisteissä. (6 p.)

Ratkaisu.

13.1. Tehtävänannossa pyydetään funktiota, jolla on tasan yksi maksimikohta ja tämä sijaitsee avoimella välillä $-1 < x < 2$. Tiedetään, että alaspäin aukeavalla paraabelilla on täsmälleen yksi maksimikohta.

Etsitään siis toisen asteen polynomi, jonka toisen asteen termi on negatiivinen (paraabeli aukeaa alaspäin) ja jonka maksimikohta sijoittuu avoimelle välille $-1 < x < 2$.

Yksi esimerkki tällaisesta polynomista on $p(x) = -x^2$. 3p



Osoitetaan, että a) tällä polynomilla on todellakin vain yksi maksimikohta suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 2$ ja b) tämä maksimikohta sijaitsee avoimella välillä $-1 < x < 2$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} p'(x) &= 0 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

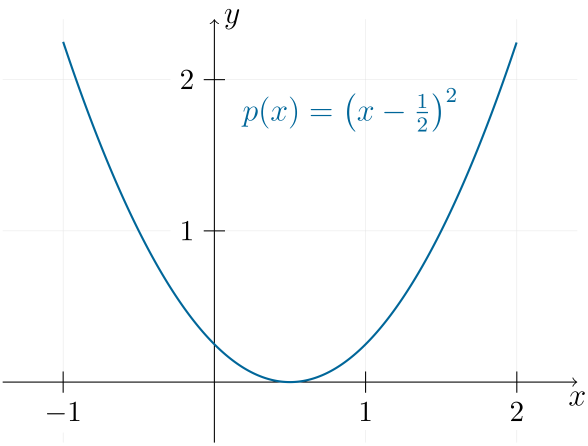
Polynomilla $p(x) = -x^2$ on siis täsmälleen yksi derivaatan nollakohta ja tämä sijaitsee annetulla välillä $-1 < x < 2$. Koska polynomin p kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, tämä nollakohta on polynomin maksimikohta.

Polynomilla $p(x) = -x^2$ on siis täsmälleen yksi maksimikohta ja tämä maksimikohta on annetulla avoimella välillä. 3p(6p)

Vastaus: Eräs esimerkki kysytystä funktiosta on $p(x) = -x^2$.

13.2. Nyt etsitään polynomifunktiota, joka on määritelty välillä $-1 \leq x \leq 2$ ja joka saa suurimman arvonsa välin molemmissa päätepisteissä.

Etsitään sellainen ylöspäin aukeava paraabeli, jonka minimikohta on välin päätepisteiden -1 ja 2 puolivälissä. Puoliväli on $x_0 = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$. Yksi tämän kohdan suhteen symmetrinen polynomi on $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. 3p(9p)



Suljetulla välillä jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Tämän polynomin derivaatta on

$p'(x) = 2(x - \frac{1}{2})$ ja derivaatan nollakohta on $x = \frac{1}{2}$.

Derivaatan nollakohdan voi laskea laskimella tai seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\, p(x) &= 0 \\ \mathrm{D} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ x - \frac{1}{2} &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan nyt polynomin arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä:

$$\begin{array}{llll} p(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 & = 0^2 & = 0 & \text{minimi} \\ p(-1) = (-1 - \frac{1}{2})^2 & = (-\frac{3}{2})^2 & = \frac{9}{4} & \text{maksimi} \\ p(2) = (2 - \frac{1}{2})^2 & = (\frac{3}{2})^2 & = \frac{9}{4} & \text{maksimi} \end{array}$$

Polynomi $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ saa siis suurimman arvonsa välin $-1 \leq x \leq 2$ molemmissa päätepisteissä. 3p (12p)

Vastaus: Eräs esimerkki kysytystä funktiosta on $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Pisteytyksestä: Sekä kohdassa 13.1 että 13.2 sai 3p sopivan funktion keksimisestä ja 3p perusteluista.

Huom! Värilliset tekstit ja kuvat ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.