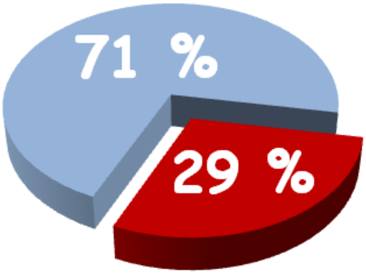
Tiesitkö tätä?

MAFY:n lääkiskurssi 2,6-kertaistaa mahdollisuutesi päästä sisään yhdellä yrityksellä. Poikkeuksellisen kovista tuloksista johtuen lääkikset alkavatkin täyttyä MAFY:n kurssilaisista.



29 % vuonna 2016 Helsingin suomenkieliseen yleislääkikseen päässeistä tuli MAFY:n kurssilta.

Lääkiskurssi

- 5-8 täysmittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa.
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 16 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa valintasi mukaan 29.8., 31.10., 9.1., 20.2. tai 28.3. Oppitunnin ajankohdaksi voi yleensä valita aamun, iltapäivän tai illan.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 4 täysmittaista harjoituskoetta kustakin aineesta ja pitkällä kurssilla lisäksi 2 yo-harjoituskoetta kustakin aineesta.
- Pitkäkurssi 28.3.-26.5. ja kevätkurssi 20.2.-26.5.

Lyhyt matematiikka, kevät 2017

Mallivastaukset, 22.3.2017

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n Jyväskylän kursseista ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Olli Hirviniemi, Katja Niemistö ja Joonas Suorsa. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
`www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot`

1. a) Ratkaise yhtälö $2x^2 + x - 10 = 0$.
   b) Kumpi on suurempi, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ vai $\frac{4}{3}$? Perustele.
   c) Sievennä lauseke $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$, kun $ab = 2$.

Ratkaisu.

a) $2x^2 + x - 10 = 0$
$a = 2$
$b = 1$
$c = -10$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$$ 1p
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4}$$
$$x = \frac{-1 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{-1+9}{4} \qquad \text{TAI} \qquad x = \frac{-1-9}{4}$$
$$x = 2 \qquad \text{TAI} \qquad x = -\frac{10}{4}^{(2}$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Yhtälön ratkaisut ovat } x = 2 \text{ tai } x = -\frac{5}{2}}}$ 1p(2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

b)
$$\frac{4}{3} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2}{3^2}} = \sqrt{^{2)}\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{32}{18}}$$ 1p(3p)

Toisaalta
$$\sqrt{^{3)}\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{18}}.$$

Koska $\sqrt{\frac{32}{18}} > \sqrt{\frac{27}{18}}$, niin $\frac{4}{3} > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Vastaus: $\underline{\underline{\frac{4}{3} \text{ on suurempi kuin } \sqrt{\frac{3}{2}}}}$ 1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tutkitaan väitettä

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &> \sqrt{\frac{3}{2}} && \|(\ )^2 \text{Neliöimisen idea} \\ {}^{2)}\frac{16}{9} &> {}^{9)}\frac{3}{2} \\ \frac{32}{18} &> \frac{27}{18} \end{aligned}$$

1p(3p)

Epäyhtälö on tosi, joten $\underline{\underline{\frac{4}{3} \text{ on suurempi kuin } \sqrt{\frac{3}{2}}}}$ 1p(4p)

c)

$$\begin{aligned} (2a+b)^2 - (2a-b)^2 &= (2a+b)(2a+b) - (2a-b)(2a-b) \\ &\quad 2a \cdot 2a + 2a \cdot b + 2a \cdot b + b \cdot b - \\ &\qquad (2a \cdot 2a + 2a \cdot (-b) - b \cdot 2a - b \cdot (-b)) \\ &= 4a^2 + 2 \cdot 2ab + b^2 - (4a^2 - 2 \cdot 2ab + b^2) \\ &= \cancel{4a^2} + 4ab + \cancel{b^2} - \cancel{4a^2} + 4ab - \cancel{b^2} \\ &= 8ab \quad , \text{ Sij. } ab = 2 \\ &= 8 \cdot 2 \\ &= \underline{\underline{16}} \end{aligned}$$

1p(5p)

1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

2. a) Eräällä reitillä on 20 matkustajaa. Heistä seitsemän ostaa opiskelijalipun, viisi eläkeläislipun, ja loput kahdeksan maksavat täyden hinnan 20 euroa. Opiskelija-alennus on 50 %, ja eläkeläisalennus on 30 %. Mikä on kaikkien matkustajien maksamien lippujen keskihinta?

b) Väritä xy-koordinaatistoon se alue, jossa seuraava epäyhtälöryhmä toteutuu:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y + 3x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

Ratkaisu.

a) Opiskelijoilta lippuihin kuluu rahaa yhteensä

$$7 \cdot 0{,}50 \cdot 20\,€ = 7 \cdot 10\,€ = 70\,€.$$ 0.5p

Eläkeläisiltä kuluu rahaa yhteensä

$$5 \cdot 0{,}70 \cdot 20\,€ = 0{,}70 \cdot 100\,€ = 70\,€.$$ 0.5p (1p)

Muilta kuluu rahaa yhteensä

$$8 \cdot 20\,€ = 160\,€.$$ 0.5p (1.5p)

Rahaa kuluu siis kaikkiaan

$$70\,€ + 70\,€ + 160\,€ = 300\,€$$ 0.5p (2p)

20 henkilöltä. Näin ollen lippujen keskihinta on

$$\frac{300\,€}{20} = 15\,€.$$

Vastaus: Lippujen keskihinta on 15 €. 1p(3p)

b) Epäyhtälö $x \geq 0$ toteutuu sellaisilla pisteillä (x, y), jotka ovat suoran $x = 0$ oikealla puolella. Epäyhtälö $y \geq 0$ toteutuu sellaisilla pisteillä (x, y), jotka ovat suoran $y = 0$ yläpuolella.

Tarkastellaan kolmatta annettua epäyhtälöä.

$$\begin{aligned} 2y + 3x - 6 &\geq 0 \\ 2y &\geq -3x + 6 \quad \| :2 \\ y &\geq -\frac{3}{2}x + 3. \end{aligned}$$

Tämän toteuttavat sellaiset pisteet (x, y), jotka ovat suoran $y = -\frac{3}{2}x + 3$ yläpuolella. 1p(4p)

Lasketaan piirtämistä varten tämän suoran leikkauspiste suoran $x = 0$ (eli y-akselin) kanssa

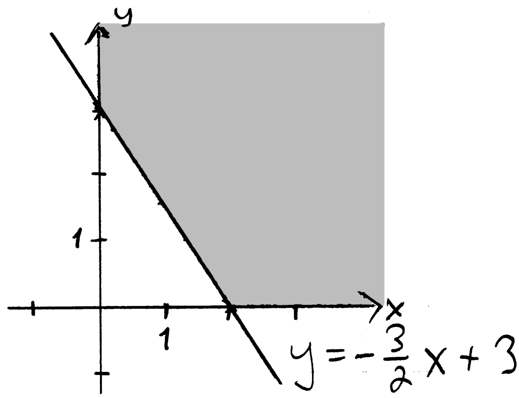
$$x = 0, \quad y = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 3 = 3, \quad \text{piste } (0, 3)$$

ja leikkauspiste suoran $y = 0$ (eli x-akselin) kanssa

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -\frac{3}{2}x + 3 &= 0 \\ \frac{3}{2}x &= 3 \quad \| \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 2, \quad \text{piste } (2, 0). \end{aligned}$$

1p(5p)

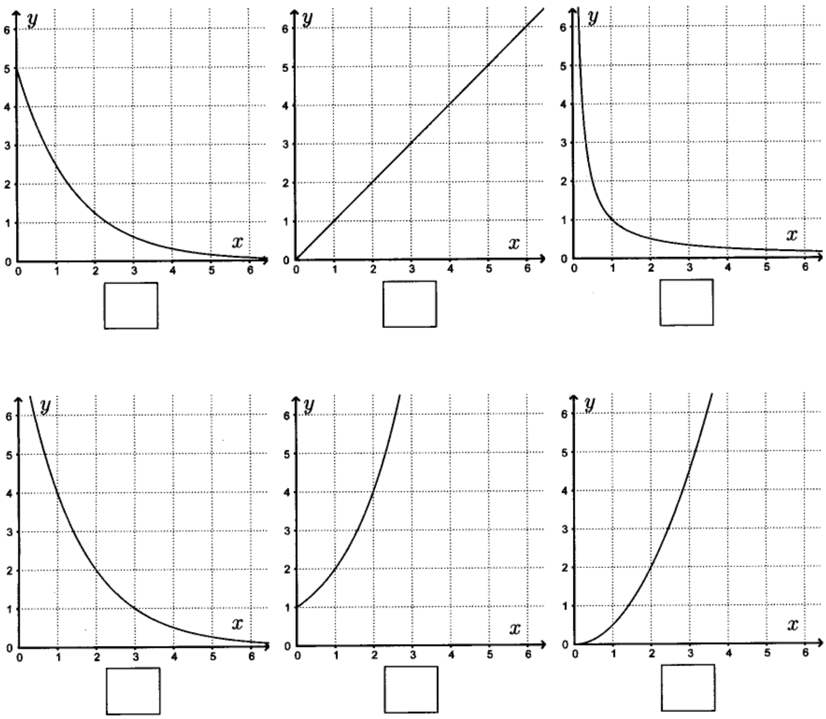
Piirretään alue:



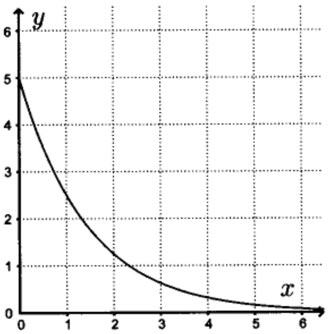
1p(6p)

3. Alla on viisi väittämää sekä kuusi kuviota. Kirjoita jokaisen kuvion alapuolella olevaan ruutuun sen väittämän kirjain, joka pätee kyseisen kuvion tapauksessa. Yksi kirjaimista tulee kahteen eri ruutuun. Vastauksia ei tarvitse perustella.

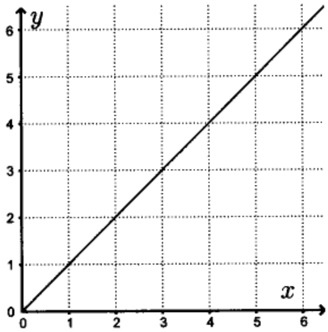
   (A) y on suoraan verrannollinen muuttujaan x.
   (B) y on kääntäen verrannollinen muuttujaan x.
   (C) y kaksinkertaistuu aina, kun muuttuja x kasvaa yhdellä.
   (D) y puolittuu aina, kun x kasvaa yhdellä.
   (E) y on suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön.



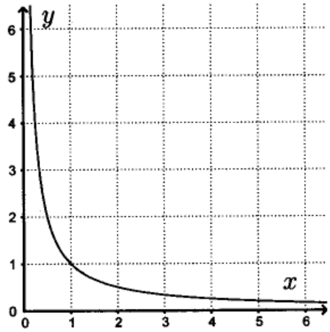
Ratkaisu.



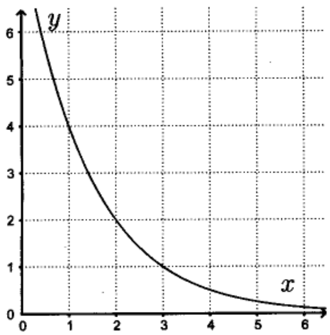
D



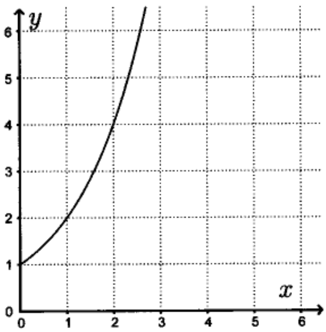
A



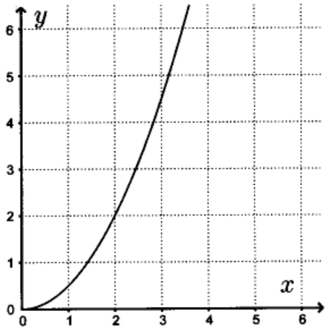
B



D



C



E

Pisteytys: 1p / oikea kirjain 6p

Selitykset (ei vaadittu vastauksessa):

Ylärivin vasemmanpuoleinen kuvaaja: Kuvaajasta voidaan lukea, että
Kun $x = 0$, $y = 5$.
Kun $x = 1$, $y = 2{,}5$.
Kun $x = 2$, $y = 1{,}25$.
Näin ollen väittämä D pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

Ylärivin keskimmäinen kuvaaja: Kuvaaja on origon kautta kulkeva nouseva suora, joten sen yhtälö on

$$y = kx,$$

missä $k > 0$ on vakio. Näin ollen y on suoraan verrannollinen muuttujaan x.

Ylärivin oikeanpuoleinen kuvaaja: Huomataan, että y kasvaa, kun x pienenee, ja y pienenee, kun x kasvaa. Väittämät A, C, ja E eivät siis päde tämän kuvaajan tapauksessa. Huomataan lisäksi, että y ei puolitu aina kun x kasvaa yhdellä, joten myöskään väittämä D ei päde tämän kuvaajan tapauksessa. Ainoa sopiva on väittämä B.

Alarivin vasemmanpuoleinen kuvaaja: Kuvaajasta voidaan lukea, että
Kun $x = 1$, $y = 4$.
Kun $x = 2$, $y = 2$.
Kun $x = 3$, $y = 1$.
Kun $x = 4$, $y = 0{,}5$.
Näin ollen väittämä D pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

Alarivin keskimmäinen kuvaaja: Kuvaajasta voidaan lukea, että
Kun $x = 0$, $y = 1$.
Kun $x = 1$, $y = 2$.
Kun $x = 2$, $y = 4$.
Näin ollen väittämä C pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

Alarivin oikeanpuoleinen kuvaaja: Kuvaaja näyttää paraabelilta. Lisäksi huomataan, että
Kun $x = 0$, $y = 0$.
Kun $x = 1$, $y = 0{,}5$.
Kun $x = 2$, $y = 2$.
Kun $x = 3$, $y = 4{,}5$.
Näiden perusteella voidaan arvata, että $y = \frac{1}{2}x^2$. Näin ollen väittämä E pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

4. Hiihtokilpailun palkintojenjakotilaisuuteen osallistuu viisi nopeinta hiihtäjää, joilla oli kaikilla eri loppuaika. Tulospalvelu on kuitenkin pettänyt, eikä kukaan tiedä kilpailijoiden oikeaa järjestystä. Tilanteen pelastamiseksi palkintojenjakaja päättää ottaa riskin ja jakaa mitalit satunnaisesti.

   a) Kuinka suurella todennäköisyydellä kaikki kolme mitalia menevät juuri oikeille kilpailijoille?
   b) Kuinka suurella todennäköisyydellä mitalikolmikko on oikea? Mitalien järjestys saa siis olla väärä.

Ratkaisu.

a) Todennäköisyys jakaa kulta oikein on $P(K) = \frac{1}{5}$. 1p

Todennäköisyys jakaa hopea oikein, jos kulta meni oikein on $P(H) = \frac{1}{4}$.

Todennäköisyys jakaa pronssi oikein, jos kulta ja hopea menivät oikein on $P(p) = \frac{1}{3}$. 1p(2p)

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(K \text{ ja } H \text{ ja } p) &= P(K) \cdot P(H) \cdot P(p) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Todennäköisyys on } \frac{1}{60}}}$ 1p(3p)

b) Todennäköisyys jakaa 1. mitali jollekin mitalikolmikosta on $P(1) = \frac{3}{5}$. 1p(4p)

Todennäköisyys jakaa 2. mitali kahdelle jäljelle olevalle mitalikolmikosta on $P(2) = \frac{2}{4}$.

Todennäköisyys jakaa 3. mitali viimeiselle mitalikolmikosta on $P(3) = \frac{1}{3}$. 1p(5p)

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(1 \text{ ja } 2 \text{ ja } 3) &= P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{60}^{(6} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Todennäköisyys on } \frac{1}{10}}}$ 1p(6p)

5. a) Elina on lähdössä työmatkalle Norjaan. Hän vaihtaa aamulla 120 euroa Norjan kruunuiksi alla olevan taulukon kurssilla. Sen jälkeen hän saa kuitenkin tiedon matkan peruuntumisesta. Kuinka monta euroa Elina jää tappiolle, kun hän käy vaihtamassa samassa valuutanvaihtopisteessä kruunut takaisin euroiksi taulukon kurssilla? Yhtiö ei peri vaihtamisesta erillistä palkkiota.

Yhden euron arvo Norjan kruunuina, setelikurssi

Osto	Myynti
9,8605 NOK	9,3565 NOK

b) Vuonna 2015 Helsingin pörssi heilahteli voimakkaasti. OMXH-indeksi, joka kuvaa pörssiyhtiöiden kokonaismarkkina-arvoa, vaihteli vuosineljänneksittäin alla olevan taulukon osoittamalla tavalla. Mikä oli indeksin kokonaismuutos vuoden 2015 aikana, ja mihin suuntaan?

Ajanjakso	Muutos prosenteissa
1. neljännes	+16,19
2. neljännes	-8,10
3. neljännes	-7,25
4. neljännes	+11,89

Ratkaisu.

a) 120 €:lla saa Norjan kruunuja

$$120 \cdot 9{,}3565\,\text{NOK} = 1\,122{,}78\,\text{NOK}\,.$$ 1p

1 122,78 NOK:lla saa vaihdon jälkeen euroja

$$\frac{1\,122{,}78}{9{,}8605}\,€ = 113{,}8664\ldots\,€ \approx 113{,}87\,€$$ 1p(2p)

Tappion suuruus on

$$120\,€ - 113{,}87\,€ = 6{,}13\,€$$

Vastaus: Elina jää tappiolle 6,13 €. 1p(3p)

Huomautus lukijalle: Tehtävänannossa ei suoraan sanota, että kyse on käteisestä rahasta, mutta valuutanvaihtopisteissä vaihdetaan rahaa tyypillisesti juuri käteiseksi. Norjassa käytetty pienin käteisraha on yksi kruunu, joten todellisuudessa valuutanvaihdossa saisi 1122 kruunua ja takaisin 78 kruunun edestä euroina (pyöristettynä). Tätä ei kuitenkaan tarvinnut ottaa huomioon ratkaisussa. Kun vaihdetaan 1122,78 kruunua takaisin euroiksi, saadaan sentin tarkkuudella 113,87 euroa. Tämä tarkoittaa sitä, että maissa, joissa on käytössä 1 ja 2 sentin kolikot, saisi 113,87 euroa ja Suomessa saisi 113,85 euroa, koska Suomessa käytössä oleva pienin käteisraha on viisi senttiä. Tehtävänannossa ei täsmennetä, mistä maasta on kysymys, mutta jos on olettanut, että kysymys on Suomesta ja saanut vastaukseksi 6,15 senttiä, vastaus luultavasti hyväksytään myös.

b) Kokonaismarkkina-arvo alussa on a. Lasketaan markkina-arvo lopussa

$$a_L = \left(1 + \frac{16{,}19}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{8{,}10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{7{,}25}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{11{,}89}{100}\right) a$$ 2p(5p)

$$a_L = 1{,}10812\ldots a$$

$$a_L \approx 1{,}108a$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Markkina-arvo on kasvanut } 10{,}8\,\%.}}$ 1p(6p)

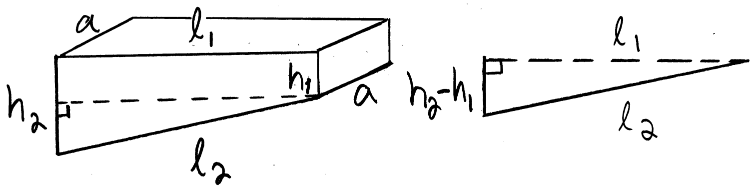
Pisteytyksestä: Myös vastaus 10,81 % hyväksytään.

6. Uima-allas on 25 m pitkä ja 10 m leveä. Se syvenee tasaisesti pituussuunnassa ja on matalassa päässä 1,1 m ja syvässä päässä 3,0 m syvä. Uima-altaan sisäpinta (seinät ja pohja) on tarkoitus laatoittaa 30 cm × 20 cm kokoisilla laatoilla, joita myydään 30 laatan laatikoissa.

   Arvioi, kuinka monta laattalaatikkoa täytyy ostaa altaan laatoittamista varten.

   Tehtävässä ei tarvitse ottaa huomioon laattojen väliin jäävien saumojen pinta-alaa eikä sitä, että osaa laatoista joudutaan leikkaamaan, jolloin koko laatan pinta-alaa ei voida hyödyntää.

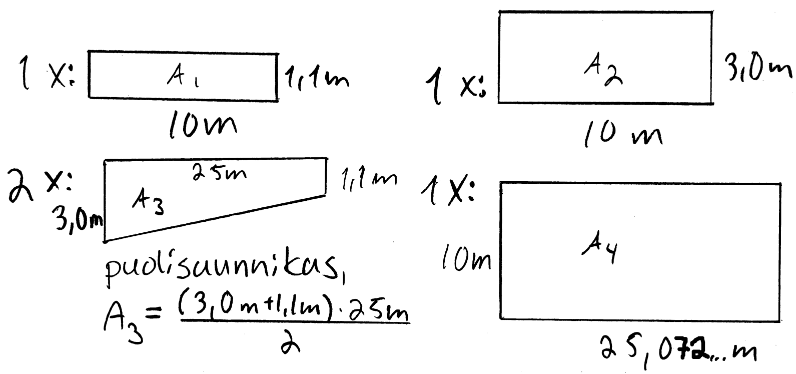
   Ratkaisu.
   Altaan tunnetut mitat ovat
   $h_1 = 1{,}1\,\text{m}$, $h_2 = 3{,}0\,\text{m}$
   $a = 10\,\text{m}$, $l_1 = 25\,\text{m}$.



Määritetään pituus l_2.

$$l_2^2 = l_1^2 + (h_2 - h_1)^2$$
$$l_2 = \underset{(-)}{\pm} \sqrt{l_1^2 + (h_2 - h_1)^2}$$
$$l_2 = \sqrt{25^2 + (3{,}0 - 1{,}1)^2}$$
$$l_2 = 25{,}096\ldots\ (\text{m})$$ 1p

Altaan pinta koostuu neljästä seinästä ja yhdestä pohjasta.



2p(3p)

Lasketaan kokonaispinta-ala.

$A = A_1 + A_2 + 2 \cdot A_3 + A_4$

$A = 10\,\mathrm{m} \cdot 1{,}1\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m} + 2 \cdot \dfrac{(3{,}0\,\mathrm{m} + 1{,}1\,\mathrm{m}) \cdot 25\,\mathrm{m}}{2} + 25{,}072\ldots\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m}$

$A = 394{,}220\ldots\,\mathrm{m}^2$ 1p(4p)

Yhden laatan pinta-ala on

$$A_L = 0{,}3\,\mathrm{m} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 0{,}06\,\mathrm{m}^2\,.$$ 1p(5p)

Yhdessä laatikossa olevien laattojen pinta-ala on $30A_L$.

Lasketaan kuinka monta laatikkoa tarvitaan

$$\frac{A}{30A_L} = \frac{394{,}220\ldots\,\mathrm{m}^2}{30 \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}^2} = 219{,}0116\cdots \approx 220$$

Vastaus: Tarvitaan 220 laatikkoa. 1p(6p)

7. a) Lieriön muotoinen Jättikynttilä on 100 cm pitkä, ja se palaa loppuun 450 tunnissa. Määritä sellaiset luvut k ja b, että lauseke $y = kt + b$ esittää kynttilän korkeutta y, kun se on palanut ajan t. Korkeus y ilmaistaan senttimetreinä ja aika t tunteina.
   b) Design-kynttilän korkeus riippuu puolestaan ajasta lausekkeen $y = 120 - 0{,}005t^2$ mukaisesti, kun y ja t ovat kuten a-kohdassa. Design-kynttilä ja Jättikynttilä sytytetään samanaikaisesti. Milloin ne ovat yhtä pitkiä?

Ratkaisu.

a) Kynttilän korkeus muuttuu lineaarisesti. Korkeutta (t, y)-koordinaatistossa kuvaavalta suoralta tiedetään pisteet $(0, 100)$ ja $(450, 0)$. 1p

Määritetään suoran yhtälö.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad \text{1p(2p)}$$
$$y - 100 = \frac{0 - 100}{450 - 0}(t - 0)$$
$$y = -\frac{2}{9}t + 100$$

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = -\frac{2}{9}t + 100$. 1p(3p)

b) Ratkaistaan kysytty aika yhtälöstä

$$y_{\text{Jätti}} = y_{\text{Design}}$$
$$-\frac{2}{9}t + 100 = 120 - 0{,}005 \cdot t^2 \quad \text{1p(4p)}$$
$$0{,}005t^2 - \frac{2}{9}t - 20 = 0$$
$$t = \frac{\frac{2}{9} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2 - 4 \cdot 0{,}005 \cdot (-20)}}{2 \cdot 0{,}005} \quad \text{1p(5p)}$$
$$t = \frac{\frac{2}{9} \pm 0{,}6703\ldots}{0{,}01}$$
$$t = 89{,}2582\ldots \quad \text{TAI} \quad (t = -44{,}813\ldots)$$
$$t \approx 89\,(\text{h}) \quad \text{Negatiivinen ajanhetki ei kelpaa.}$$

Lisäksi kynttilät ovat yhtä pitkät, kun ne ovat molemmat palaneet loppuun. Jättikynttilä on palanut loppuun 450 tunnin kuluttua. Ratkaistaan, milloin Design-kynttilän pituus on nolla.

$$\begin{aligned} y_{\text{design}} &= 0 \\ 120 - 0{,}005t^2 &= 0 \\ 0{,}005t^2 &= 120 \quad \| : 0{,}005 \\ t^2 &= \frac{120}{0{,}005} \\ t &= \pm\sqrt{\frac{120}{0{,}005}} \\ t &= 154{,}91\ldots < 450. \end{aligned}$$

Design-kynttilä palaa loppuun ennen Jättikynttilää, joten kynttilät ovat yhtä pitkät myös, kun $t \geq 450$.

Vastaus: Kynttilät ovat yhtä pitkiä, kun sytytyksestä on kulunut 89 tuntia ja lisäksi ne ovat yhtä pitkät kaikkina ajanhetkinä sen jälkeen, kun sytytyksestä on kulunut 450 tuntia. 1p(6p)

8. Tehtaalla valmistettavien hiustenkuivaajien maksimiteho on normaalijakautunut. Jakauman keskiarvo on 1 453 wattia ja keskihajonta 37,2 wattia.

Valmistusprosessin uudistuksen jälkeen vastaavat arvot ovat 1 467 ja 10,5 wattia. Ulkoisesti hiustenkuivaajat eivät ole muuttuneet.

Tehtaan korjaustyöpajalla mitataan mm. korjattavan hiustenkuivaajan maksimiteho. Millä maksimitehon arvolla on yhtä todennäköistä, että hiustenkuivaaja on tehty vanhalla valmistusprosessilla, kuin se, että se on tehty uudella valmistusprosessilla?

Ratkaisu.

HUOM! Lukijalle: Tämän tehtävän tehtävänanto oli ongelmallinen, koska ratkaisu ylittää lyhyen matematiikan vaatimustason ja siitä puuttui tarvittavia tietoja. Alla on selitetty, miten tehtävän voisi ratkaista, jos tarvittavat tiedot olisi annettu.

$$\begin{aligned}
\overline{X}_1 &= 1453 \\
S_1 &= 37{,}2 \\
\overline{X}_2 &= 1467 \\
S_2 &= 10{,}5.
\end{aligned}$$

Oletetaan, että hiustenkuivaajista yhteensä määrä n olisi vanhalla prosessilla valmistettuja hiustenkuivaajia ja määrä m olisi siis uudella menetelmällä valmistettuja.

Merkitään vanhalla prosessilla valmistettujen hiustenkuivaajien maksimitehon tiheysfunktiota $f_v(X)$:llä ja uudella prosessilla valmistettujen hiustenkuivaajien maksimitehon tiheysfunktiota $f_u(X)$:llä. Tiheysfunktio $f_v(X)$ kuvaa likimääräisesti sitä, kuinka suurella osuudella vanhalla menetelmällä valmistetuista hiustenkuivaajista on maksimiteho X tietyn mittayksikön (esim. yhden watin) tarkkuudella, ja $f_u(X)$ vastaavasti uudelle prosessille. Maksimitehot ovat jakautuneet normaalisti, joten tiheysfunktiot ovat

$$\begin{aligned}
f_v(X) &= \frac{1}{S_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\overline{X}_1}{S_1}\right)^2} \\
f_u(X) &= \frac{1}{S_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\overline{X}_2}{S_2}\right)^2}
\end{aligned}$$

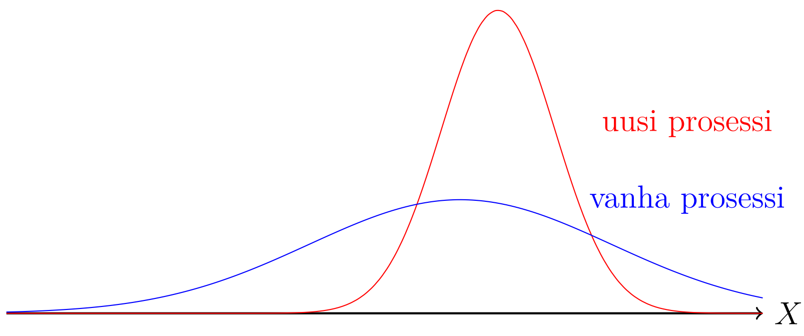
Näin ollen funktio $n \cdot f_v(X)$ kuvaa siis sitä, kuinka monella vanhalla prosessilla valmistetulla hiustenkuivaajalla on maksimiteho X, ja $m \cdot f_u(X)$ vastaavasti uudelle prosessille. Huomaa, että tässäkin kuivaajien maksimiteho on siis X tietyn mittayksikön tarkkuudella.

Tällöin yhtälöstä

$$n \cdot f_v(X) = m \cdot f_u(X)$$

saadaan ratkaisuksi maksimitehon arvot X, joille kaikista hiustenkuivaajista, joilla on maksimiteho X, yhtä moni on valmistettu vanhalla prosessilla ja uudella prosessilla, eli toisin sanoen on yhtä todennäköistä, että hiustenkuivaaja olisi valmistettu vanhalla tai uudella prosessilla.

Tämän voi hahmottaa piirtämällä jakaumat koordinaatistoon siten, että vaaka-akselilla on hiustenkuivaajan maksimiteho ja pystyakselilla on valmistettujen hiustenkuivaajien lukumäärä. Tällöin maksimitehon arvot, joilla todennäköisyys olla valmistettu vanhalla tai uudella prosessilla on sama, löytyvät jakaumien leikkauspisteistä, joissa siis molemmilla prosesseilla on valmistettu sama määrä kyseisen maksimitehon omaavia hiustenkuivaajia.



Tehtävänannossa olisi siis pitänyt kertoa, kuinka paljon (tai missä suhteessa) vanhalla ja uudella prosessilla valmistettuja hiustenkuivaajia on (tai päätyy korjauspajalle), jotta tehtävän olisi voinut ratkaista. Tässäkin tapauksessa ratkaisu olisi ylittänyt lyhyen matematiikan vaatimustason.

Pisteytys: Lopullisen pisteytyksen päättää YTL. Suosittelemme pisteyttämään alustavasti kokelaiden ratkaisut seuraavasti.

Jos on kirjoittanut perustellun tulkinnan tehtävänannosta ja muodostanut yhtälön tekemänsä tulkinnan pohjalta oikein, saa 3p. Jos on lisäksi laskenut tekemänsä tulkinnan pohjalta laskun oikein, saa yhteesä 6p.

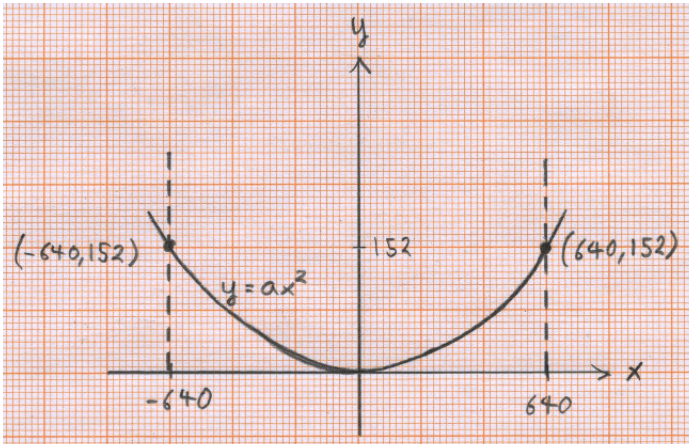
9. Golden Gate -siltaa San Franciscossa kannattaa kaksi sillan päädyissä oleviin torneihin kiinnitettyä kaapelia. Profiilikuvassa (eli sivulta katsottuna) kaapeli on paraabelin muotoinen. Tornien välinen etäisyys on 1 280 m, ja korkeusero vaijerin alimman pisteen ja tornin huipun välillä on 152 m.

   a) Määritä kaapelin muotoa kuvaavan yhtälön $y = ax^2$ kerroin a, kun origo on vaijerin alimmassa pisteessä. (2 p.)

   b) Määritä derivaatan avulla kulma, jossa kaapeli kohtaa tornin. (4 p.)

Ratkaisu.

a) Hahmotellaan paraabelin kuvaaja. Tornien huiput ovat etäisyydellä $\frac{1280\,\text{m}}{2} = 640\,\text{m}$ vaijerin alimmasta kohdasta.



Ratkaistaan a tunnetusta pisteestä $(640, 152)$. 1p

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 \quad \| : x^2 \\
a &= \frac{y}{x^2} \quad \| \text{ Sij. } y = 152 \text{ ja } x = 640 \\
a &= \frac{152}{640^2} \\
a &= 0{,}00037109\ldots \\
&\approx 0{,}000371
\end{aligned}
$$

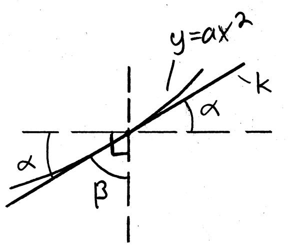
Paraabelin yhtälö on $y = 0{,}000371x^2$. 1p(2p)

b) Lasketaan paraabelin tangentin kulmakerroin pisteessä $(640, 152)$. Derivoidaan $y(x)$:

$$y'(x) = 2ax.$$ 1p(3p)

Lasketaan kulmakerroin kohdassa $x = 640$.

$$\begin{aligned} k &= y'(640) \\ &= 2 \cdot a \cdot 640 \\ &= 2 \cdot \frac{152}{640^2} \cdot 640 \\ &= 0{,}475 \end{aligned}$$ 1p(4p)



Suuntakulmalle α pätee

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= k \\ \tan\alpha &= 0{,}475 \\ \alpha &= 25{,}407\ldots^\circ \end{aligned}$$ 1p(5p)

Ratkaistaan kulma β.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ \\ \beta &= 90^\circ - \alpha \\ \beta &= 90^\circ - 25{,}407\ldots^\circ \\ &= 64{,}592\ldots^\circ \\ &\approx 64{,}6^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: Kaapeli kohtaa tornin 64,6°:een kulmassa. 1p(6p)

10. Suomalaisten kotitalouksien talletusten kokonaisarvo oli 80 778 000 000 euroa vuoden 2015 lopussa. Näiden talletusten keskimääräinen korko oli 0,32 %. Valtiovarainministeriö yrittää arvioida talletusten koroista saatavan vuoden 2017 lähdeveron suuruutta seuraavien oletusten pohjalta: kotitalouksien talletusten arvo nousee vuoden 2016 loppuun mennessä 1,5 % ja edelleen 1,0 % vuoden 2017 loppuun mennessä. Lisäksi arvoidaan, että keskikorko laskee 0,05 prosenttiyksikköä kumpanakin vuonna.

    Kuinka paljon Suomen valtio saa tämän arvion perusteella talletusten koroista perittävää lähdeveroa vuodelta 2017, kun lisäksi oletetaan, että lähdeveroprosentti on koko ajan 30? Anna vastaus miljoonan euron tarkkuudella.

    Ratkaisu.
    Vuosi 2015:

    Talletukset yhteensä $T_0 = 80\,778\,000\,000$ €.
    Korko $r_0 = 0{,}0032$.

    Vuosi 2016:

    $T_1 = 1{,}015 \cdot T_0$.
    $r_1 = 0{,}0032 - 0{,}0005 = 0{,}0027$.

    Vuosi 2017:

    $T_2 = 1{,}01 \cdot T_1 = 1{,}01 \cdot 1{,}015 T_0 = 1{,}02515 T_0$. 1p
    $r_2 = 0{,}0027 - 0{,}0005 = 0{,}0022$. 1p(2p)

    Korkojen määrä vuonna 2017 on

$$R = r_2 T_2 = 0{,}0022 \cdot 1{,}02515 T_0 = 0{,}002253\ldots T_0.$$ 1p(3p)

    Valtio perii koroista 30 % lähdeveron, joten veron määrä on

$$\begin{aligned} 0{,}3R &= 0{,}3 \cdot 0{,}002253\ldots \cdot T_0 \\ &= 0{,}3 \cdot 0{,}002253\ldots \cdot 80\,778\,000\,000\,€ \\ &= 54\,654\,314{,}02\,€ \\ &\approx 55\,000\,000\,€ \end{aligned}$$ 1p(4p) 1p(5p)

    Vastaus: Kysytty vero on 55 000 000 €. 1p(6p)

11. Maakellarin sisälämpötila vaihtelee hitaasti vuodenaikojen mukaan. Alin lämpötila 2 °C saavutetaan helmi-maaliskuun vaihteessa, ja ylin lämpötila 8 °C saavutetaan elo-syyskuun vaihteessa. Oletetaan, että lämpötilan vaihtelua voidaan kuvata sinikäyrällä. Määritä sellaiset parametrien A, B, c ja t_0 arvot, että lämpötila T saadaan kaavalla

$$T = A + B\sin\left(c(t+t_0)\right),$$

kun ajan t yksikkönä on kuukausi. Tehtävässä kaikki kuukaudet voidaan olettaa yhtä pitkiksi.

Ratkaisu.
Ratkaisussa hyödynnetään tietoa, että sinifunktio on jaksollinen ja sen jakson pituus on 2π, sekä sitä, että sinin pienin arvo on -1 ja suurin arvo on 1.

Lämpötilan ajatellaan olevan jaksollinen siten, että jakson pituus on 12 kk. Koska sinifunktion jakson pituus on 2π, niin

$$\begin{aligned} c(t+12+t_0) &= c(t+t_0) + 2\pi \\ 12c + \cancel{c(t+t_0)} &= \cancel{c(t+t_0)} + 2\pi \\ 12c &= 2\pi \quad \| : 12 \\ c &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

1p

Valitaan B siten, että $B > 0$. Tällöin alin lämpötila saadaan, kun sinin arvo on -1. Siis

$$2 = A + B\cdot(-1) = A - B. \tag{1}$$

Vastaavasti ylin lämpötila saadaan, kun sinin arvo on 1. Siis

$$8 = A + B\cdot 1 = A + B. \tag{2}$$

1p(2p)

Ratkaistaan yhtälöpari laskemalla yhteen yhtälöt (1) ja (2).

$$\begin{aligned} 2 + 8 &= A - B + A + B \\ 10 &= 2A \quad \| : 2 \\ A &= 5 \end{aligned} \tag{3}$$

1p(3p)

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} 8 &= 5 + B \\ B &= 3. \end{aligned}$$

1p(4p)

Olkoon t aika kuukausina vuoden alusta. Tällöin alin lämpötila saavutetaan, kun $t = 2$, jolloin sini saa siis arvon -1.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{6}(2+t_0)\right) &= -1 && \text{1p(5p)}\\
\sin\left(\frac{\pi}{6}(2+t_0)\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\
\frac{\pi}{6}(2+t_0) &= -\frac{\pi}{2} \quad \| : \left(\frac{\pi}{6}\right)\\
2+t_0 &= -3\\
t_0 &= -5. && \text{1p(6p)}
\end{aligned}$$

Huomautus lukijalle: Sinin jaksollisuudesta johtuen t_0 voidaan valita millä tahansa tavalla, jossa

$$\frac{\pi}{6}(2+t_0) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

missä n on kokonaisluku.

Vastaus:

$$\begin{aligned}
A &= 5\\
B &= 3\\
c &= \frac{\pi}{6}\\
t_0 &= -5,
\end{aligned}$$

kun aika t on kuukausia vuoden alusta.

Lisäselitys:

$t_0 = 7$ on myös kelvollinen vastaus, ja mikä tahansa luku $-5 + 12n$, jossa n on kokonaisluku.

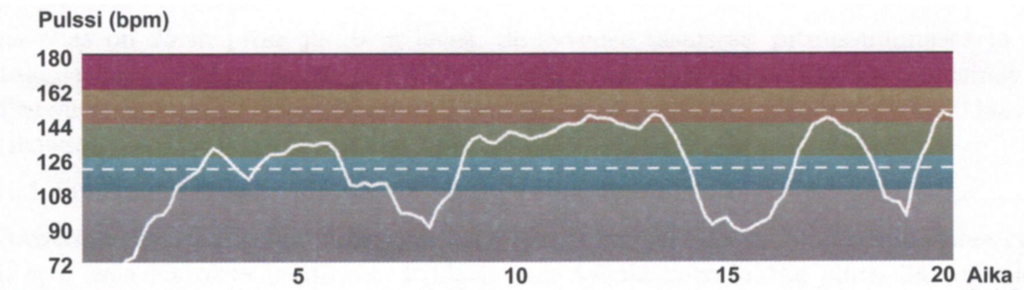
$c = 30°$ on myös kelvollinen vastaus, vaikkakin matemaattisissa malleissa on tavanomaisempaa käyttää kulman yksikkönä radiaania.

Jos oltaisiin valittu B negatiiviseksi, saataisiin $B = -3$, jolloin $t_0 = 1 + 12n$. Tämä on myös oikea vastaus.

12. Kalle ja Leena tekevät Biofysiikan perusteet -kurssin harjoitustyötä. He ovat mitanneet koehenkilön pulssin $f(t)$ urheilusuorituksen aikana hetkellä t. Tuloksena on alla oleva käyrä. Mittalaitteisto siirtää tulokset digitaalisessa muodossa langattomasti suoraan Kallen ja Leenan käyttämään tietokoneeseen.

Kallen ja Leenan tehtävänä on ohjelmoida tietokone laskemaan automaattisesti, kuinka monta paikallista minimikohtaa pulssikäyrässä on. Kalle ehdottaa funktion derivaatan nollakohtien etsimistä. Leenan mukaan tämä toimii joskus, kuten tapauksessa $t = 15{,}2\,\text{min}$, mutta ei aina, esimerkiksi silloin, kun $t = 19{,}3\,\text{min}$

a) Onko $f'(16)$ positiivinen vai negatiivinen? Perustele ja selitä sanallisesti, mitä vastaus tarkoittaa.
b) Kuvaile sanallisesti, mitä tiedät derivaatan ja funktion minimin välisestä yhteydestä.
c) Arvioi Kallen ehdotusta paikallisten minimikohtien löytämiseksi sekä Leenan esittämää huomiota.



Lähde: YTL

Ratkaisu.

a) Kohtaan $t = 16$ piirretty tangentti on nouseva suora, 0.5p
joten sen kulmakerroin $f'(16)$ on positiivinen. 1p (1.5p)
Tämä tarkoittaa sitä, että hetkellä 16 min koehenkilön pulssi on nousussa. 0.5p (2p)

Pisteytyksestä: Hyvän vastauksen piirteissä ei ollut sanallista selitystä siitä, mitä vastaus tarkoittaa, joten mahdollisesti voi saada täydet pisteet myös ilman sanallista selitystä (viimeinen rivi yllä).

b) Derivaatta kertoo tangentin kulmakertoimen. Derivoituvan funktion ääriarvokohdassa sen tangentti on vaakasuora, eli sen derivaatta on nolla. 1p(3p)

Minimikohdan vasemmalla puolella funktio on laskeva, eli derivaatta on negatiivinen, ja minimikohdan oikealla puolella funktio on kasvava, eli derivaatta on positiivinen. 1p(4p)

Pisteytyksestä: Kohdasta b saa mahdollisesti täydet pisteet vain kertomalla, että derivaatta kertoo tangentin kulmakertoimen ja että derivoituvan funktion minimikohdassa derivaatta on nolla, koska tangentti on vaakasuora.

c) Kallen ehdotus perustuu huomioon, että minimikohdissa on derivaatan nollakohta silloin, kun funktio on derivoituva. Kalle ei kuitenkaan ottanut huomioon sitä, että myös maksimikohdissa derivaatta on nolla, ja toisaalta funktiolla saattaa olla minimi sellaisessa kohdassa, jossa se ei ole derivoituva, eli jossa sille ei voi piirtää tangenttia. 1p(5p)

Leenan huomio perustuu siihen, että kohdassa 15,2 min funktion kuvaajalle voi piirtää tangentin, joten siinä olevan minimin löytää etsimällä derivaatan nollakohdat. Toisaalta kohdassa 19,3 min on myös minimi, mutta funktion kuvaaja on siinä kohdassa terävä, eikä siihen voi piirtää tangenttia, joten funktiolla ei ole siinä kohdassa derivaattaa, ja täten tätä kohtaa ei löydä etsimällä derivaatan nollakohdat. 1p(6p)

13. Eksponentiaalista mallia voidaan käyttää monien luonnontieteen ilmiöiden kuvaamiseen.

 a) Anna esimerkki ilmiöstä, jonka kuvaamiseen malli soveltuu.
 b) Anna esimerkki ilmiöstä, jonka kuvaamiseen malli ei sovellu.

 Mallin soveltuvuus ja soveltumattomuus pitää perustella.

 Ratkaisu.

 Eksponentiaalinen malli soveltuu sellaisten ilmiöiden kuvaamiseen, joissa jokin suure muuttuu tietyssä ajassa aina saman prosenttiosuuden.

 a) Esimerkkejä ilmiöistä, joiden kuvaamiseen eksponentiaalinen malli soveltuu:
   - Bakteerien kokonaismassa petrimaljassa. Bakteerimassan kasvunopeus petrimaljassa on likimain verrannollinen bakteerien määrään, eli niiden massa kasvaa tietyn prosenttiosuuden verran päivässä.
   - Radioaktiivisen aineen määrä sen hajotessa. Tiedetään, että sillä on puoliintumisaika, joten puoliintumisajassa siitä hajoaa 50%, eli tietyssä ajassa sama prosenttiosuus.

   Pisteytys: Yksi esimerkki riittää. Vastaus = 1p, Perustelu = 2p. 3p

 b) Esimerkkejä ilmiöistä, joiden kuvaamiseen eksponentiaalinen malli ei sovellu:
   - Tasaisesti etenevän kappaleen paikka ajan funktiona. Paikka kasvaa aina tietyn suuruisen matkan samassa ajassa, joten sitä kuvaa lineaarinen malli, ei eksponentiaalinen.
   - Harmonisen jousen varassa edestakaisin värähtelevän kappaleen paikka. Kappaleen paikkakoordinaatti vuoroin kasvaa ja vuoroin pienenee, joten eksponentiaalinen malli ei sovellu siihen.

   Pisteytys: Yksi esimerkki riittää. Vastaus = 1p, Perustelu = 2p. 3p