DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta
- Arkiaamuisin **31.3.-23.5.2014** (92 oppituntia tai laaja kurssi 136 oppituntia)

Lääkiskurssi

- 5 täysimittaista harjoituspääsykoetta. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- **27.3.-23.5.2014** (153 oppituntia)

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Fysiikka, kevät 2014

Mallivastaukset, 21.3.2014

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1.

a) Luettele luonnon neljä perusvuorovaikutusta. (2 p.)
b) Mikä perusvuorovaikutus pitää koossa seuraavat rakenteet: (4 p.)

1. vesimolekyyli
2. spiraaligalaksi
3. lumikide
4. protoni

Ratkaisu.

a) Luonnon neljä perusvuorovaikutusta ovat gravitaatiovuorovaikutus, sähkömagneettinen vuorovaikutus, vahva vuorovaikutus ja heikko vuorovaikutus. 0,5p / oikea kohta (2p)

b)

1 sähkömagneettinen vuorovaikutus
2 gravitaatiovuorovaikutus
3 sähkömagneettinen vuorovaikutus
4 vahva vuorovaikutus

1p / oikea kohta (6p)

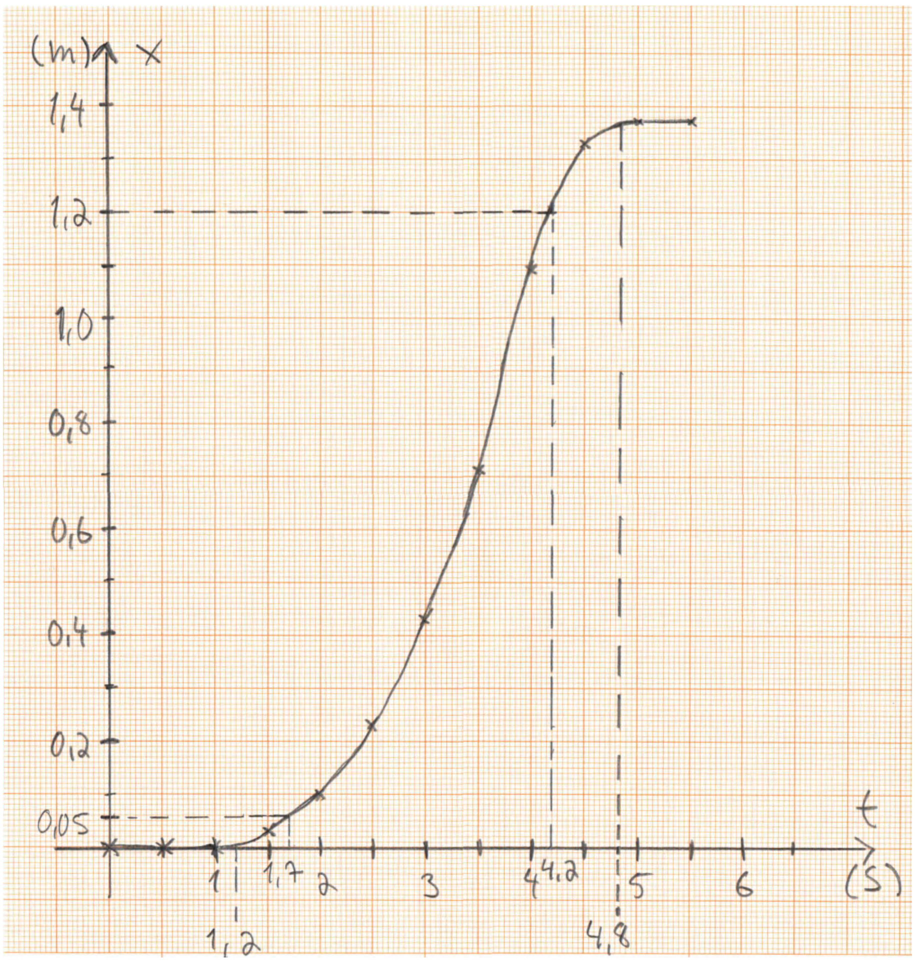
2. Radio-ohjattavan leikkiauton suoraviivaista liikettä kuvattiin videokameralla. Oheisessa taulukossa on auton paikka ajan funktiona.

t(s)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
x(m)	0,00	0,00	0,00	0,03	0,10	0,23	0,43	0,71	1,09	1,33	1,37	1,37

a) Piirrä auton paikan kuvaaja $x(t)$. (3 p.)
b) Määritä auton keskinopeus aikavälillä 1,7 s . . . 4,2 s (2 p.)
c) Kuinka kauan auto liikkuu?

Ratkaisu.

a)



3p

b) Keskinopeus on aikavälillä kuljettu matka jaettuna aikavälin pituudella.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Kuvaajalta luettuna auto on liikkunut matkan

$$\Delta x = 1{,}20\,\mathrm{m} - 0{,}05\,\mathrm{m} = 1{,}15\,\mathrm{m}$$

ajassa

$$\Delta t = 4{,}2\,\mathrm{s} - 1{,}7\,\mathrm{s} = 2{,}5\,\mathrm{s}$$ 1p (4p)

Eli keskinopeus on

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1{,}15\,\text{m}}{2{,}5\,\text{s}} = 0{,}46\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vastaus: Keskinopeus aikavälillä $1{,}7\,\text{s} \ldots 4{,}2\,\text{s}$ on $0{,}46\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. 1p (5p)

c) Kuvaajalta nähdään, että auto lähtee liikkeelle ajanhetkellä $t \approx 1{,}2\,\text{s}$ ja lakkaa liikkumasta, kun $t \approx 4{,}8\,\text{s}$. Auto on siis liikkunut ajan

$$4{,}8\,\text{s} - 1{,}2\,\text{s} = 3{,}6\,\text{s}.$$

Vastaus: Auto liikkuu 3,6 sekunnin ajan. 1p (6p)

3. Pakastimesta otettu pussillinen marjoja sulatetaan mikroaaltouunissa. Jäisten marjojen massa on 250 g ja lämpötila −18 °C. Mikroaaltouuni lämmittää ja sulattaa marjoja 180 W:n teholla. Marjat ovat uunissa 9 min 20 s. Mikä on marjojen lämpötila, kun ne otetaan uunista? Marjat ovat lähes kokonaan vettä.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} t &= 9\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s} = 9 \cdot 60\,\mathrm{s} + 20\,\mathrm{s} = 560\,\mathrm{s} \\ T_0 &= -18\,°\mathrm{C} \\ P &= 180\,\mathrm{W} \\ c_j &= 2{,}09 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}} \\ c_v &= 4{,}1819 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}} \\ s &= 333 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}} \end{aligned}$$

Sulatukseen ja lämmitykseen käytetty energia on

$$Q_1 = Pt.$$

Jäisten marjojen lämmittämiseen kuluva energia on

$$Q_2 = c_j m \Delta T_1, \quad \Delta T_1 = 18°.$$

Marjojen sulatukseen kuluva energia on

$$Q_3 = sm.$$

Sulaneiden marjojen lämmitykseen kuluva energia on

$$Q_4 = c_v m \Delta T_2. \text{ 2p}$$

Nyt

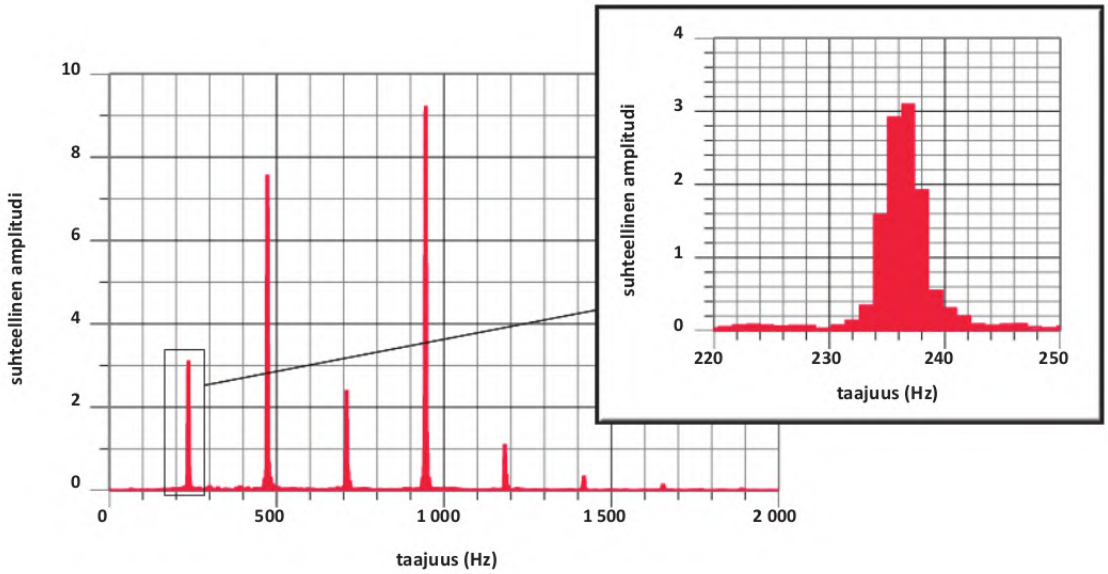
$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + Q_3 + Q_4 \\ Pt &= c_j m \Delta T_1 + sm + c_v m \Delta T_2 \quad \text{1p (3p)} \\ c_v m \Delta T_2 &= Pt - c_j m \Delta T_1 - sm \quad \| : (c_v m) \\ \Delta T_2 &= \frac{Pt - c_j m \Delta T_1 - sm}{c_v m} \quad \text{1p (4p)} \\ \Delta T_2 &= \frac{180\,\mathrm{W} \cdot 560\,\mathrm{s} - 2{,}09 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}} \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} \cdot 18\,°\mathrm{C} - 333 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg}}{4{,}1819 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}} \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg}} \\ \Delta T_2 &= 7{,}79071\ldots\,°\mathrm{C} \quad \text{1p (5p)} \\ \Delta T_2 &\approx 7{,}8\,°\mathrm{C} \end{aligned}$$

ΔT_2 on lämpötilan muutos, kun alkulämpötila on 0 °C. Näin ollen lopullinen lämpötila on 7,8 °C.

1p (6p)

4. Vuvuzela eli stadiontorvi tuli tunnetuksi vuoden 2010 jalkapallon MM-kisojen yhteydessä. Oheinen kuvaaja esittää vuvuzelan äänen taajuusspektriä. Osa kuvaajasta on suurennettu.

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/37/Vuvuzela_red.jpg/800px-Vuvuzela_red.jpg>. Luettu 21.3.2013.



a) Miten ääni syntyy torven sisällä?
b) Toimiiko vuvuzela soidessaan kuten molemmista päistä avoin putki vai kuten toisesta päästä suljettu putki? Perustele annetun taajuusspektrin avulla.
c) Vuvuzelan soittaja vetää keuhkoihinsa heliumia ja puhaltaa torveen. Helium syrjäyttää kaiken ilman torven sisältä. Kuinka suuri on syntyvän äänen matalin taajuus?

Ratkaisu.

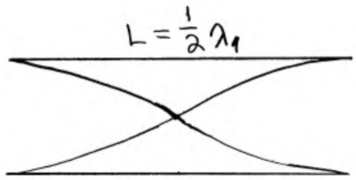
a) Vuvuzelan kapeampi pää painetaan huulille ja huulia täristämällä aiheutetaan putken sisään ääniaaltoja. Tietyillä torvelle ominaisilla aallonpituuksilla syntyy torven koko matkalle seisova aalto, kun molempiin suuntiin kulkevat aallot interferoivat keskenään. Kun huulien tärinän taajuuksissa on torven ominaistaajuuksia, torven sisällä oleva aaltoliike resonoi eli alkaa värähdellä hyvin voimakkaasti, ja vuvuzelasta kuuluu ääni. 2p
b) Kaksi ensimmäistä maksimia ovat taajuuden spektrissä

$$f_1 = 236\,\text{Hz ja}$$
$$f_2 = 470\,\text{Hz}.$$

Taajuuksien suhde on

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{470\,\text{Hz}}{236\,\text{Hz}} = 1{,}9915\ldots \approx 1{,}99.$$

Molemmista päistään avoimessa putkessa syntyvät ominaistaajuudet voidaan selvittää tutkimalla syntyviä aallonpituuksia. (Samoin voidaan tehdä myös toisesta päästä suljetulle putkelle.) Selvitetään molemmista päistä avoimen putken perustaajuus pituuden ja äänen nopeuden avulla.

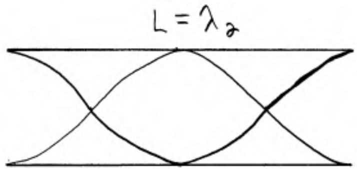


$$L = \frac{1}{2}\lambda_1$$
$$\lambda_1 = 2L.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan

$$v = f_1\lambda_1 \quad \| : \lambda_1$$
$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \quad \|\text{sij. } \lambda_1 = 2L$$
$$f_1 = \frac{v}{2L}.$$

Selvitetään samoin 1. ylätaajuus.



Samoin kuin edellä saadaan:

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} \quad \|\text{sij. } \lambda_2 = L$$
$$f_2 = \frac{v}{L}$$
$$f_2 = 2\frac{v}{2L} \quad \|\text{sij. } f_1 = \frac{v}{2L}$$
$$f_2 = 2f_1.$$ 1p (3p)

Tämä on likimain sama kuin spektrikuvaajassa, ja toisesta päästä suljetulle putkelle $f_2 = 3f_1$, joten vuvuzela toimii kuin molemmista päistä avoin putki. 1p (4p)

c) Äänen nopeus 20 °C:n lämpötilassa on:

$$\text{ilmassa: } v_i = 343\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\text{heliumissa: } v_h = 965\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan

$$v_i = f_i\lambda$$
$$\lambda = \frac{v_i}{f_i}.$$

Aallonpituus pysyy samana vaikka väliaine putkessa muuttuu, joten heliumille on

$$
\begin{aligned}
f_h &= \frac{v_h}{\lambda} \quad \| \text{sij. } \lambda = \frac{v_i}{f_i} \\
f_h &= \frac{v_h}{v_i} \cdot f_i \\
f_h &= \frac{965\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{343\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot 236\,\mathrm{Hz} \\
&= 663{,}96\ldots\,\mathrm{Hz} \\
&\approx 660\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}
$$

1p (5p)

Vastaus: Syntyvän äänen matalin taajuus on 660 Hz. 1p (6p)

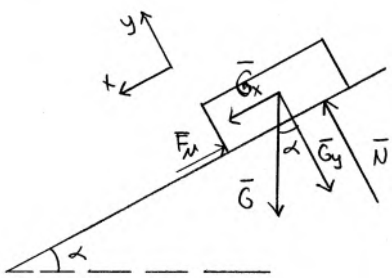
5. Omakotitalon peltikatolla, jonka kaltevuuskulma on 25°, on jäinen lumipaakku.

a) Kuinka suuri on vähintään katon ja paakun välinen kitkakerroin, kun paakku pysyy paikallaan katolla?

b) Sään lauhtuessa paakku lähtee liukumaan. Katon ja paakun välinen liikekitkakerroin on silloin 0,08. Kuinka suuri on paakun nopeus, kun se on liukunut 4,0 m kattoa pitkin?

Ratkaisu.

a)



$$\alpha = 25°$$
$$\text{lumipaakun massa} = m$$

$$G_x = \sin(\alpha) \cdot G$$
$$G_y = \cos(\alpha) \cdot G$$

Jääpalikka ei liiku. Newtonin toisen lain mukaan: Y-suunta:

$$\begin{aligned}
\sum \overline{F} &= \overline{0} \\
\overline{G}_y + \overline{N} &= \overline{0} \\
N - G_y &= 0 \\
G_y &= N \\
\cos(\alpha) \cdot G &= N \quad \text{1p}
\end{aligned} \tag{1}$$

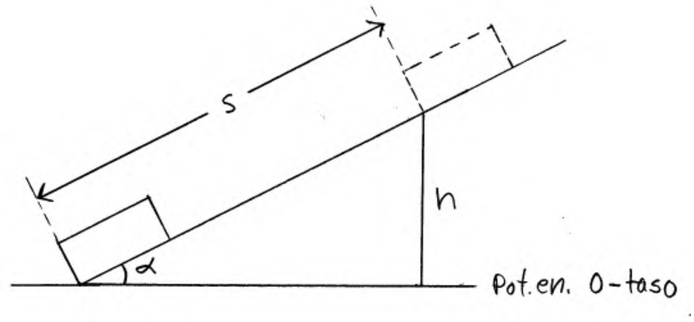
X-suunta:

$$\begin{aligned}
\sum \overline{F} &= \overline{0} \\
\overline{G}_x + \overline{F}_\mu &= \overline{0} \\
G_x - F_\mu &= 0 \\
G_x &= F_\mu \\
\sin(\alpha) \cdot G &= N \cdot \mu \\
\mu &= \frac{\sin(\alpha) G}{N} \quad \| \text{sij. } (1) \\
\mu &= \frac{\sin(\alpha) \cancel{G}}{\cos(\alpha) \cancel{G}} \\
\mu &= \tan(\alpha) \quad \text{1p (2p)} \\
\mu &= \tan(25°) \\
&= 0{,}46630\ldots \\
&\approx 0{,}47
\end{aligned}$$

Tarkasteltu tilanne on rajatapaus, jossa pinnan kitkavoima riittää juuri ja juuri pitämään lumipaakun paikallaan. Kitkakertoimen suuruuden on siis oltava vähintään 0,47.

Vastaus: Kitkakerroin μ on vähintään 0,47. 1p (3p)

b)



$$s = 4{,}0\,\mathrm{m}$$
$$\mu = 0{,}08$$
$$\alpha = 25°$$

Valitaan potentiaalienergian 0-taso korkeudelle, jossa paakku on liu'uttuaan 4,0 m. Tällöin potentiaalienergia ennen liukua on mgh. h ratkaistuna kuvasta:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$$
$$h = \sin(\alpha) \cdot s.$$

Työperiaatteen mukaan

$$W = \Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - mgh,$$

missä W on kitkavoiman liukumismatkalla tekemä työ

$$W_\mu = -F_\mu \cdot s.$$ 1p (4p)

Yhtälöstä ratkaistaan nopeus v:

$$-F_\mu \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - F_\mu \cdot s$$

Kitkavoiman lauseke a-kohdasta:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - \cos(\alpha) \cdot \mu \cdot mgs \quad \| : \left(\frac{m}{2}\right)$$
$$v^2 = 2 \cdot (gh - \cos(\alpha) \cdot \mu gs)$$
$$v^2 = 2 \cdot (g\sin(\alpha) \cdot s - \cos(\alpha) \cdot \mu gs)$$
$$v = {}_{(}\pm_{)} \sqrt{2gs(\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \mu)}$$ 1p (5p)
$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}0\,\mathrm{m} \cdot (\sin(25°) - \cos(25°) \cdot 0{,}08)}$$
$$= 5{,}24184303\ldots\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$\approx 5{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Vastaus: Nopeus on $5{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ 4,0 m:n liu'un jälkeen. 1p (6p)

6. Leikkipuiston karusellin massa on 154 kg ja säde 1,3 m. Kyydissä on kolme lasta, joiden massat ovat 18 kg, 21 kg ja 23 kg. Lapset ovat aluksi karusellin ulkoreunalla. Lapset potkivat vauhtia, kunnes karuselli pyörii 2,5 kierrosta 10 sekunnissa.

   Karusellia voidaan pitää homogeenisena kiekkona ja lapsia pistemäisinä kappaleina. Ilmanvastus ja karusellin laakerin kitka ovat pieniä.

a) Lapset siirtyvät kohti karusellin keskustaa, kunnes kaikki ovat 0,30 m:n etäisyydellä pyörimisakselista. Kuinka suuri on tällöin karusellin kulmanopeus? (3 p.)
b) Pieneneekö, säilyykö vai kasvaako karusellin ja lasten yhteinen pyörimisenergia lasten siirtyessä keskemmälle? (1 p.)
c) Lapset siirtyvät takaisin karusellin ulkoreunalle. Yksi heistä alkaa tasaisesti jarruttaa karusellia jalallaan. Karuselli pyörii 3,0 kierrosta, kunnes pysähtyy. Kuinka kauan jarrutus kestää? (2 p.)

Ratkaisu.

a)

$$
\begin{aligned}
m_k &= 154\,\text{kg} \\
m_1 &= 18\,\text{kg} \\
m_2 &= 21\,\text{kg} \\
m_3 &= 23\,\text{kg} \\
m_L &= m_1 + m_2 + m_3 = 62\,\text{kg} \\
r &= 1{,}3\,\text{m} \\
r_2 &= 0{,}30\,\text{m} \\
n_1 &= \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25\,\frac{1}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

a) Määritetään karusellin ja lasten yhteinen hitausmomentti alkutilanteessa.

Karuselli:

$$J_k = \frac{1}{2} m_k r^2$$

Lapset:

$$J_i = m_i r^2.$$

Alkutilanteessa yhteinen hitausmomentti on

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2} m_k r^2 + m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 r^2 \\
J_1 &= \left(\frac{1}{2} m_k + m_1 + m_2 + m_3\right) r^2 \\
J_1 &= \left(\frac{1}{2} m_k + m_L\right) r^2. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Yhteinen hitausmomentti lopputilanteessa on

$$J_2 = \frac{1}{2} m_k r^2 + m_L r_2^2. \quad \text{1p} \qquad (2)$$

Pyörimismäärä säilyy, joten

$$
\begin{aligned}
L_1 &= L_2\\
J_1\omega_1 &= J_2\omega_2 \quad \| : J_2\\
\omega_2 &= \frac{J_1}{J_2}w_1 \quad \|\text{sij. (1), (2) ja } \omega_1 = 2\pi n_1\\
\omega_2 &= \frac{\left(\frac{1}{2}m_k + m_L\right)r^2}{\frac{1}{2}m_k r^2 + m_L r_2^2}\cdot 2\pi n_1 \quad \text{1p (2p)}\\
\omega_2 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 154\,\mathrm{kg} + 62\,\mathrm{kg}\right)\cdot(1{,}3\,\mathrm{m})^2}{\frac{1}{2}\cdot 154\,\mathrm{kg}\cdot(1{,}3\,\mathrm{m})^2 + 62\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}3\,\mathrm{m})^2}\cdot 2\pi\cdot 0{,}25\,\frac{1}{\mathrm{s}}\\
&= 2{,}7190\ldots\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\\
&\approx 2{,}7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kulmanopeus on $2{,}7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. 1p (3p)

b) a-kohdan nojalla $\omega_2 > \omega_1$, eli $\frac{\omega_2}{\omega_1} > 1$ ja

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \tag{3}$$

Täten

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\\
&= \frac{1}{2}(J_2\omega_2)\omega_2 \quad \|\text{sij. (3)}\\
&= \frac{1}{2}J_1\omega_1\omega_2\\
&= \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\frac{\omega_2}{\omega_1}\\
&> \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\\
&= E_1
\end{aligned}
$$

Huom! Energia muuttuu, koska lapset tekevät työtä siirtyessään kohti pyörimiskeskipistettä.

Huom! Suuruudet voi tarkistaa myös laskemalla energiat.

Vastaus: Yhteinen pyörimisenergiaa kasvaa. 1p (4p)

c) Pyörimismäärä säilyy, kun lapset siirtyvät ulkoreunalle, joten

$$\omega_1 = \omega_3 = 2\pi n_1.$$

Karusellin kulmakiihtyvyys on tasaista, joten jarrutuksen aikainen kiertokulma on

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \omega_3 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \|\text{sij. } \omega_3 = 2\pi n_1\\
\varphi &= 2\pi n_1 t - \frac{1}{2}\alpha t^2. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ ja kulmanopeus on lopussa nolla, joten

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_3 - \alpha t \\ 0 &= 2\pi n_1 - \alpha t \\ \alpha &= \frac{2\pi n_1}{t}. \quad \text{1p (5p)} \end{aligned} \tag{5}$$

Sijoitetaan (5) yhtälöön (4).

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi n_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi n_1}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}} \\ \varphi &= \pi n_1 t \quad \| : (\pi n_1) \\ t &= \frac{\varphi}{\pi n_1} \quad \| \text{sij. } \varphi = 3 \cdot (2\pi) \\ t &= \frac{6\cancel{\pi}}{\cancel{\pi} n_1} \\ t &= \frac{6}{n_1} \\ t &= \frac{6}{0{,}25\,\frac{1}{\mathrm{s}}} \\ &= 24\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Vastaus: Jarrutus kestää 24 s. 1p (6p)

7. Laboratoriotyössä on käytettävissä paristo, säätövastus, virtamittari ja jännitemittari. Tarkoituksena on tutkia pariston sisäistä resistanssia kytkemällä se säätövastukseen ja mittaamalla pariston kautta kulkevaa virtaa ja pariston napajännitettä.

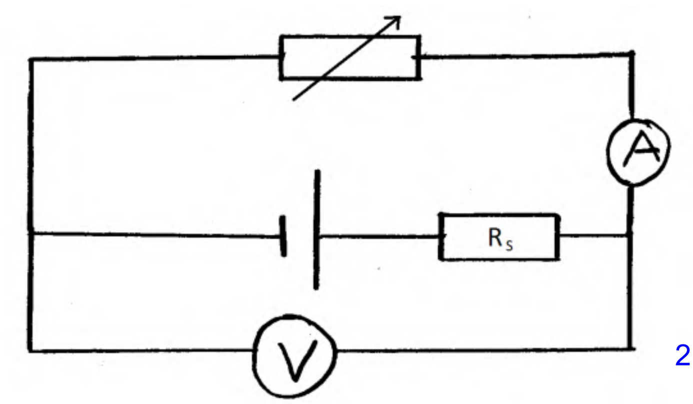
a) Piirrä kytkentäkaavio. (2 p.)

b) Säätövastuksen resistanssia muutetaan, ja luetaan virran ja jännitteen arvot. Tulokset ovat oheisessa taulukossa. Määritä sopivaa graafista esitystä käyttäen pariston sisäinen resistanssi ja lähdejännite. (4 p.)

I(mA)	70,0	96,0	153	198	256	320	458	623
U(V)	1,490	1,482	1,463	1,451	1,434	1,415	1,374	1,328

Ratkaisu.

a)

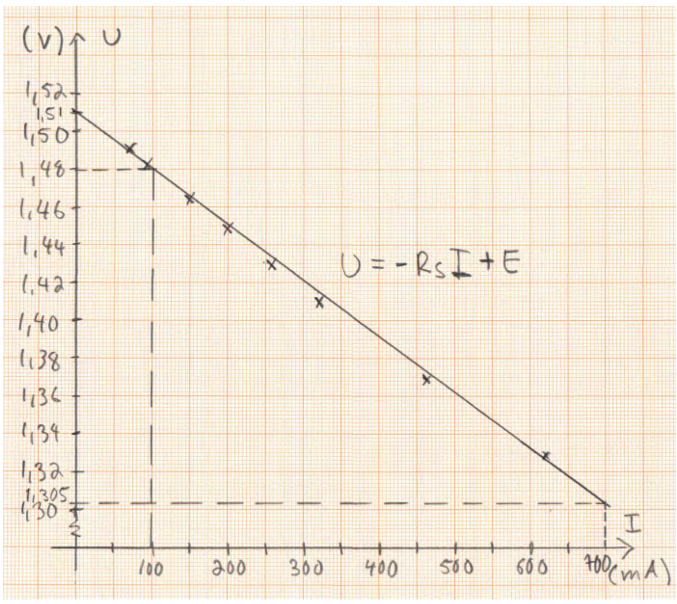


2p

b) Napajännite kuormitetusta jännitelähteestä:

$$\begin{array}{ccccc} U = & -R_sI & + & E \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ y = & kx & + & b \end{array}$$

Esitettäessä mittaustulokset (I, U)-koordinaatistossa, voidaan sisäisen resistanssin vastaluku lukea mittaustuloksiin sovitetun suoran kulmakertoimesta, ja jännitelähteen lähdejännite suoran ja jänniteakseli leikkauspisteestä.



2p (4p)

Kuvaajalta luettuna

$$E = 1{,}51\,\mathrm{V} \approx 1{,}5\,\mathrm{V} \quad \text{1p (5p)}$$

Kulmakerroin:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\Delta U}{\Delta I} \\ &= \frac{1{,}48\,\mathrm{V} - 1{,}305\,\mathrm{V}}{100\,\mathrm{mA} - 700\,\mathrm{mA}} \\ &= -2{,}9166\ldots \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mA}} \\ &= -0{,}29166\ldots\,\Omega \\ &\approx -0{,}29\,\Omega \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Lähdejännite on } 1{,}5\,\mathrm{V} \text{ ja sisäinen resistanssi } 0{,}29\,\Omega.}}$ 1p (6p)

8. Sähkölämmitin, joka toimii teholla 1,0 kW, on kytketty vaihtojännitelähteeseen, jonka tehollinen jännite on 240 V ja taajuus 50 Hz. Lämmittimen teho halutaan laskea arvoon 850 W. Tämä voidaan toteuttaa kytkemällä lämmittimen kanssa sarjaan joko vastus tai käämi. Oletetaan, että lämmittimellä on vain resistanssia ja muut komponentit ovat ideaalisia.

a) Kuinka suuri on tarvittavan vastuksen resistanssi?
b) Kuinka suuri on tarvittavan käämin induktanssi?
c) Kuinka suuri on jännitelähteestä otettava sähköteho kussakin tapauksessa?

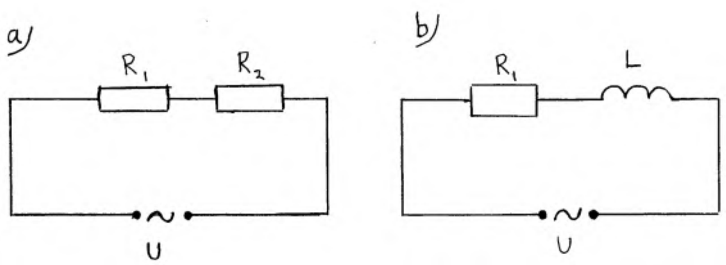
Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1000\,\mathrm{W} \\
P_2 &= 850\,\mathrm{W} \\
U &= 240\,\mathrm{V} \\
f &= 50\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}
$$

Lasketaan lämmittimen resistanssi R_1.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= UI \\
P_1 &= \frac{U^2}{R_1} \\
R_1 &= \frac{U^2}{P} \\
&= \frac{(240\,\mathrm{V})^2}{1000\,\mathrm{W}} \\
&= 57{,}6\,\Omega.
\end{aligned}
$$

Tilanne sen jälkeen, kun lämmittimen (R_1) kanssa on kytketty sarjaan a) vastus (R_2) ja b) käämi (L):



a) Jännite U jakautuu vastusten R_1 ja R_2 yli jännitteiksi U_1 ja U_2, jolloin

$$
\begin{aligned}
U &= U_1 + U_2 \\
U &= R_1 I + R_2 I, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

missä I on tehollinen virta virtapiirissä. Halutulla teholla P_2 saadaan:

$$
\begin{aligned}
P_2 &= U_2 I \\
P_2 &= R_1 I^2 \\
I &= \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \quad \text{1p} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1):

$$
\begin{aligned}
U &= R_1\sqrt{\frac{P_2}{R_1}} + R_2\sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \\
R_2\sqrt{\frac{P_2}{R_1}} &= U - R_1\sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \quad \| : \sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \\
R_2 &= U\sqrt{\frac{R_1}{P_2}} - R_1 \\
R_2 &= 240\,\mathrm{V}\cdot\sqrt{\frac{57{,}6\,\Omega}{850\,\mathrm{W}}} - 57{,}6\,\Omega \\
R_2 &= 4{,}87597\ldots\,\Omega \\
R_2 &\approx \underline{\underline{4{,}9\,\Omega}} \quad \text{1p (2p)}
\end{aligned}
$$

b) Kun R_2 on korvattu käämillä L, on piirin impedanssi

$$Z = \sqrt{R_1^2 + (2\pi f L)^2}.$$

Komponentit olivat ideaalisia, joten

$$
\begin{aligned}
U &= ZI \\
I &= \frac{U}{Z},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

missä I on tehollinen virta virtapiirissä. Toisaalta lämmittimen tehon piti edelleen olla P_2, jolloin a-kohdan yhtälö (2) pätee edelleen. Siten yhtälöistä (2) ja (3) saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{U}{Z} &= \sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \quad \text{1p (3p)} \\
\frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (2\pi f L)^2}} &= \sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \quad \|(\quad)^2 \\
\frac{U^2}{R_1^2 + (2\pi f L)^2} &= \frac{P_2}{R_1} \\
P_2R_1^2 + P_2(2\pi f L)^2 &= R_1U^2 \\
(2\pi f L)^2 &= \frac{R_1U^2 - P_2R_1^2}{P_2} \\
2\pi f L &= \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{R_1U^2}{P_2} - R_1^2} \\
L &= \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{R_1U^2}{P_2} - R_1^2} \\
L &= \frac{1}{2\pi\cdot 50\,\frac{1}{\mathrm{s}}}\sqrt{\frac{57{,}6\,\Omega\cdot(240\,\mathrm{V})^2}{850\,\mathrm{W}} - (57{,}6\,\Omega)^2} \\
L &= 0{,}07702\ldots\,\mathrm{H} \\
L &\approx \underline{\underline{77\,\mathrm{mH}}} \quad \text{1p (4p)}
\end{aligned}
$$

c) Jännitelähteen sähköteho lisätyn vastuksen tapauksessa on

$$P = UI,$$

missä I on haluttu sähkövirran (tehollinen) arvo kaavasta (2). Siis

$$\begin{aligned} P &= U\sqrt{\frac{P_2}{R_1}} \\ &= 240\,\mathrm{V} \cdot \sqrt{\frac{850\,\mathrm{W}}{57{,}6\,\Omega}} \\ &= 921{,}954\ldots\ \mathrm{W} \\ &\approx 920\,\mathrm{W} \quad \text{1p (5p)} \end{aligned}$$

Koska kytketty käämi oli ideaalinen, eikä sillä ole siten resistanssia, on jännitelähteestä otettu teho yhtäsuuri kuin lämmittimen teho.

Vastaus: Jännitelähteestä otettava teho on lisävastuksen kanssa 920 W ja käämin kanssa 850 W. 1p (6p)

9. Yksi ydinreaktorissa tapahtuvista uraanin fissioreaktioista on

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{143}_{60}\mathrm{Nd} + {}^{90}_{40}\mathrm{Zr} + 3\mathrm{n}$$

jossa vapautuu lisäksi elektroneja, neutriinoja ja gammasäteilyä. Oletetaan, että ydinreaktori toimii vain tämän reaktion avulla. Reaktorin sähköteho on 1600 MW ja hyötysuhde 0,32.

a) Kuinka monta ^{235}U-ydintä reaktorissa fissioituu sekunnissa? (4 p.)
b) Kuinka suuri on reaktorissa vuodessa kuluvan ^{235}U-polttoaineen massa? (2 p.)

Ratkaisu.

$$P_2 = 1600\,\mathrm{MW} = 1600 \cdot 10^6\,\mathrm{W}$$
$$\eta = 0{,}32$$

Tehtävänannon reaktioyhtälö on

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{143}_{60}\mathrm{Nd} + {}^{90}_{40}\mathrm{Zr} + 3\mathrm{n}$$

Kirjoitetaan reaktioyhtälö täydellisessä muodossa, jossa otetaan huomioon myös sähkövarauksen säilyminen. Vasemmalla puolella sähkövaraus on +92 e ja oikealla puolella +60 e + 40 e = +100 e. Näin ollen reaktiossa täytyy syntyä 8 elektronia. Koska reaktion leptoniluku kasvaa +8:lla, täytyy reaktiossa syntyä myös 8 elektronin antineutriinoa. Reaktioyhtälö on siten

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{143}_{60}\mathrm{Nd} + {}^{90}_{40}\mathrm{Zr} + 3\mathrm{n} + 8\,\mathrm{e} + 8\overline{\nu}_\mathrm{e}.$$ 1p

a) Lasketaan reaktion massaero (antineutriino on massaton).

$$\begin{aligned}
\Delta m &= m_\mathrm{n} + (m_\mathrm{U} - 92m_\mathrm{e}) - (m_\mathrm{Nd} - 60m_\mathrm{e}) - (m_\mathrm{Zr} - 40m_\mathrm{e}) - 3m_\mathrm{n} - 8m_\mathrm{e} \\
\Delta m &= m_\mathrm{U} - m_\mathrm{Nd} - m_\mathrm{Zr} - 2m_\mathrm{n} \\
\Delta m &= 235{,}043925\,\mathrm{u} - 142{,}909810\,\mathrm{u} - 89{,}904703\,\mathrm{u} - 2 \cdot 1{,}008665\,\mathrm{u} \\
&= 0{,}212082\,\mathrm{u}.
\end{aligned}$$

Vapautuu energia

$$E_R = \Delta m c^2.$$ 1p (2p)

Reaktorista saatava teho on

$$\begin{aligned}
P_2 &= \eta P_1 \quad \| \text{sij. } P_1 = \frac{E}{\Delta t} \\
P_2 &= \eta \frac{E}{\Delta t} \quad \| \text{sij. } E = N E_R \\
P_2 &= \frac{\eta N E_R}{\Delta t} \quad \| : (\eta E_R) \\
\frac{N}{\Delta t} &= \frac{P_2}{\eta E_R} \quad \| \text{sij. } E_R = \Delta m c^2 \\
\frac{N}{\Delta t} &= \frac{P_2}{\eta \Delta m c^2} \\
\frac{N}{\Delta t} &= \frac{1600 \cdot 10^6\,\mathrm{W}}{0{,}32 \cdot 0{,}212082 \cdot 1{,}6605402 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} \\
\frac{N}{\Delta t} &= 1{,}579702\ldots \cdot 10^{20}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \\
&\approx 1{,}6 \cdot 10^{20}\,\frac{1}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

1p (3p)

Vastaus: Ytimiä fissioituu $1{,}6 \cdot 10^{20}$ kappaletta sekunnissa. 1p (4p) b)

$$t = 365{,}25\,\mathrm{a} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}$$

Kuluvan uraanin massa on

$$m = m_\mathrm{U} \cdot \frac{N}{\Delta t} \cdot t \quad \text{1p (5p)}$$

$$\begin{aligned} m &= 235{,}043925 \cdot 1{,}6605402 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}579702\ldots \cdot 10^{20}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} \\ &= 1945{,}707\ldots\,\mathrm{kg} \\ &\approx 1900\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Vastaus: Uraania kuluu 1900 kg vuodessa. 1p (6p)

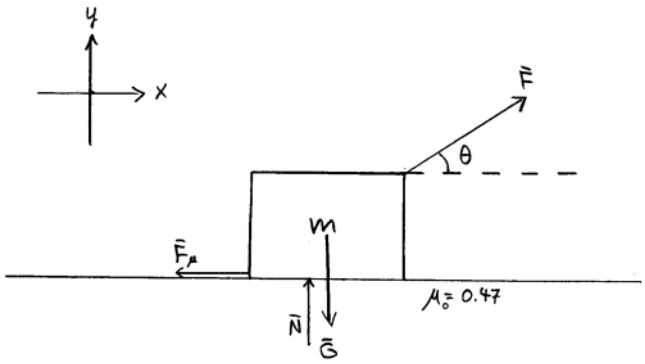
10. Kappale on levossa tasaisella ja vaakasuoralla pinnalla. Kappaletta vedetään langasta voimalla F. Lanka muodostaa kuvan mukaisesti kulman θ vaakatason suhteen.

a) Kuinka suuri kulma θ on, kun kappale lähtee liukumaan pitkin pintaa pienimmällä mahdollisella voimalla F? Pintojen välinen lepokitkakerroin on 0,47. Määritä kulma θ yhden asteen tarkkuudella. (4 p.)

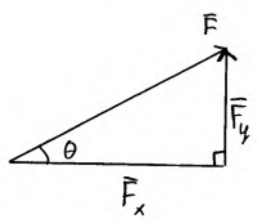
b) Johda kulman θ riippuvuus lepokitkakertoimesta μ_0, kun pintaa pitkin liikkeelle lähtöön tarvittava voima F on pienin mahdollinen. (2 p.)

Ratkaisu.

a) ja b)



Olkoon kappaleen massa m ja $0 \leq \theta \leq 90°$. Tarvittava voima F, jolla kappale lähtee liikkeelle, saadaan rajatapauksesta, jossa kyseessä on lepokitkan maksimi.



Kuvasta saadaan

$$F_x = \cos(\theta) \cdot F$$
$$F_y = \sin(\theta) \cdot F$$

Rajatapaus saadaan Newtonin toisella lailla. Y-suunnassa:

$$\sum_y = 0$$
$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_y = 0$$
$$-G + N + F_y = 0$$
$$N = G - F_y$$

Sijoitetaan $F_y = \sin(\theta) \cdot F$

$$N = G - \sin(\theta) \cdot F \quad 1p \tag{1}$$

X-suunnassa:

$$\begin{aligned}\sum_x &= 0\\ \overline{F}_x + \overline{F}_\mu &= 0\\ F_x - F_\mu &= 0\\ F_\mu &= F_x\end{aligned}$$

Sijoitetaan $F_x = \cos(\theta) \cdot F$ ja $F_\mu = \mu_0 N$

$$\mu_0 N = \cos(\theta) \cdot F \quad \text{1p (2p)} \tag{2}$$

Nyt yhdistämällä yhtälöt (1) ja (2) saadaan:

$$\begin{aligned}\mu_0 G - \mu_0 \sin(\theta) \cdot F &= \cos(\theta) \cdot F\\ \mu_0 G &= (\mu_0 \sin(\theta) + \cos(\theta))F\\ F &= \frac{G}{(\mu_0 \sin(\theta) + \cos(\theta))}. \quad \text{1p (3p)}\end{aligned}$$

Nyt koska G on vakio, pienin F saadaan, kun lauseke

$$g(\theta) = \mu_0 \sin(\theta) + \cos(\theta)$$

on suurimmillaan. Derivoidaan $g(\theta)$.

$$g'(\theta) = \mu_0 \cos(\theta) - \sin(\theta).$$

Ratkaistaan nollakohdat välillä $0 \leq \theta \leq 90°$.

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= 0\\ \mu_0 \cos(\theta) - \sin(\theta) &= 0\\ \tan(\theta) &= \mu_0 \quad (\cos(\theta) \neq 0)\\ \theta &= \arctan(\mu_0) \quad \text{1p (4p)}\end{aligned}$$

Nyt kitkakertoimesta tiedetään, että $0 < \mu_0 < 1$, joten $0 < \arctan(\mu_0) < 45°$. Tarkistetaan derivaatan merkit välin päätepisteissä.

$$\begin{aligned}\mu_0 \cos(0) - \sin(0) &= \mu_0 > 0\\ \mu_0 \cos(90°) - \sin(90°) &= -1 < 0.\end{aligned}$$

Täten $g(\theta)$:n suurin arvo saadaan aina, kun $\theta = \arctan(\mu_0)$.

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Tarvittava voima on pienin, kun } \theta = \arctan(\mu_0).}}$ 1p (5p)

Kitkakerroin $\mu_0 = 0{,}47$, joten b-kohdan nojalla kulma, jolla tarvittava voima on pienin, on

$$\theta = \arctan(0{,}47) = 25{,}1735\ldots° \approx \underline{\underline{25°.}} \quad \text{1p (6p)}$$

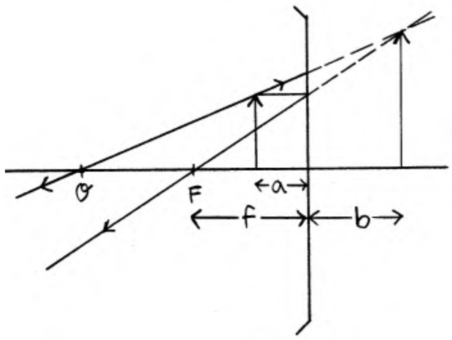
11. Monen kylpyhuoneen varusteisiin kuuluu suurentava parranajo- tai meikkipeili.

a) Millä etäisyydellä sinun pitää olla peilistä, että näet kasvosi peilistä suurennettuna ja oikein päin? Perustele kuvan avulla. (2 p.)

b) Kun kävelet takaperin kauemmaksi peilistä, huomaat, miten suurennettu peilikuvasi muuttuu ensin epäselväksi, sitten se kääntyy ylösalaisin ja muuttuu uudestaan teräväksi. Selitä ilmiöt. Perustele vastauksesi piirroksen avulla. (4 p.)

Ratkaisu.

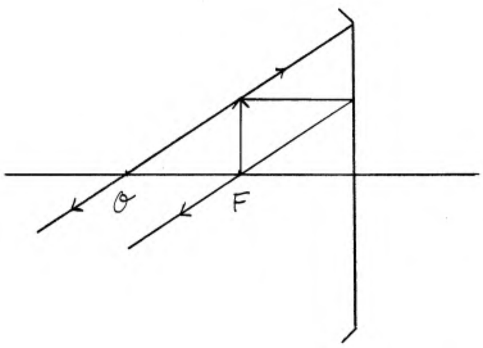
a)



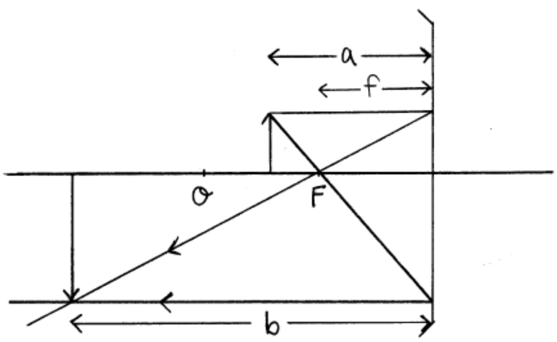
1p

Kupera peili muodostaa aina pienennetyn kuvan, joten peilin täytyy olla kovera. Kun esineen, eli kasvojen, etäisyys a koverasta peilistä on pienempi kuin peilin polttoväli f, muodostuu peilin taakse oikeinpäin oleva suurennettu valekuva. 1p (2p)

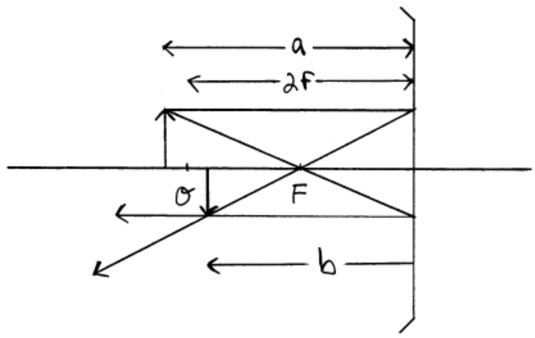
b)



Kun esine (kasvot) on polttopisteessä, peilistä heijastuvat, samasta pisteestä lähteneet säteet ovat yhdensuuntaisia. Nämä säteet eivät leikkaa, eivätkä niiden jatkeet leikkaa missään pisteessä. Tällöin ei muodostu kuvaa ja kasvoja ei voi nähdä peilistä. 1p (3p)



Kun esine (kasvot) on kauempana peilistä kuin pottopiste, mutta lähempänä kuin kaarevuuskeskipiste, muodostuu väärinpäin oleva, todellinen kuva esineen taakse. Koska esine on samalla katsoja (kasvot), on kuva myös sitä katsovan silmän takapuolella. Tämä on ongelmallista silmän toiminnan kannalta. Ihmisen silmässä on kupera linssi, jonka muoto muuttuu esineen etäisyyden mukaan siten, että verkkokalvolle saadaan tarkka kuva. Ihmisen silmän linssi kykenee kuitenkin mukautumaan vain tietyissä rajoissa. Yleensä ihminen ei kykene muodostamaan tarkkaa kuvaa esineestä, jos se on alle 10 cm:in päässä silmästä. Kun kuva on silmän takana, pitäisi linssin muuttaa muotoaan vieläkin enemmän, mihin ihmisen silmä ei kykene. Sen vuoksi verkkokalvolle syntyy epätarkka kuva, kun kasvot ovat polttopisteen ja kaarevuuskeskipisteen välissä. 1p (5p) 1p (4p)



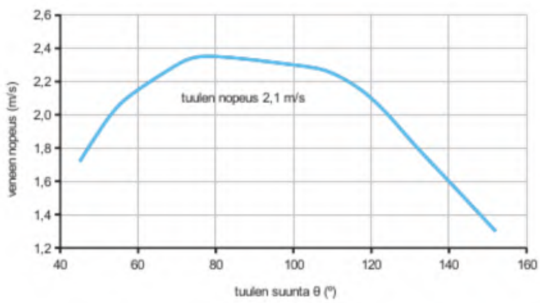
Kun esine (kasvot) on kaarevuuskeskipistettä kauempana, muodostuu väärinpäin oleva todellinen kuva silmän ja peilin väliin. Kun kasvot ovat vielä niin lähellä kaarevuuskeskipistettä, että kasvojen kuva on alle 10 cm:in päässä kasvoista, eivät silmät vielä saa tarkkaa kuvaa verkkokalvolle. Kun katsoja siirtyy kauemmaksi ja kuvan etäisyys kasvaa selvästi yli 10 cm:in, silmä kykenee muodostamaan kasvojen kuvasta tarkan kuvan verkkokalvolle. 1p (6p)

+12.

a) Selitä, miksi kuvan mukainen kölillinen purjevene ei voi kaatua pelkästään tuulen voimasta, vaikka se kallistuisi voimakkaasti. Kopioi viereinen läpileikkaus purjeveneestä (kuva 1) vastauspaperiisi ja perustele vastaustasi kuvaan piirretyillä voimavektoreilla. (3 p.)

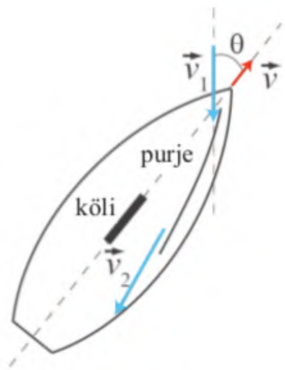
b) Kuvassa 2 on esitetty purjeveneen nopeus tuulen suunnan funktiona, kun tuulen nopeus suhteessa maahan on 2,1 m/s. Veneen liikesuunnalle täysin vastaisen tuulen suunta on 0°. Veneen liikesuuntaan puhaltavan (täysmyötäisen) tuulen suunta on 180°. Miksi purjeveneen nopeus ei ole suurin, kun purjehditaan täysmyötäiseen? (2 p.)

c) Kuvassa 3 on ylhäältä kuvattu purjevene. Kuvasta ilmenee ilmavirran nopeus $\overline{v}_1$ kun se osuu purjeeseen ja ilmavirran nopeus $\overline{v}_2$ sen jättäessä purjeen. Selitä, miten purjevene voi edetä kuvan 3 mukaisesti vinosti vastatuuleen. (4 p.)

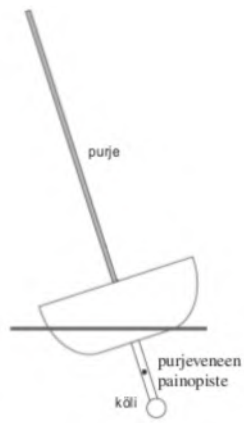


<www.hallberg-rassy.com>. Luettu 1.3.2012.

kuva 2



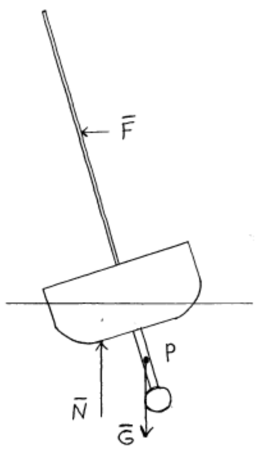
kuva 3



kuva 1

Ratkaisu.

a)



$\overline{F}$ on tuulen aiheuttaman voiman resultantti,

$\overline{N}$ on veneen syrjäyttämän veden aiheuttama nostevoima,

$\overline{G}$ on veneen painovoima,

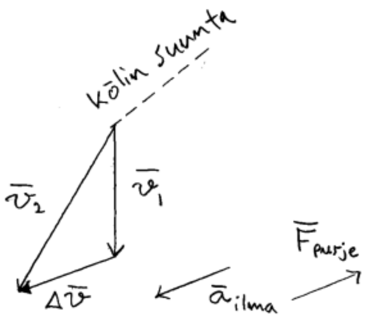
P on veneen painopiste.

Koska vene on kallistunut kuvassa vasemmalle, on veneen vasen reuna syvemmällä upoksissa kuin oikea reuna. Tästä johtuen nostevoiman resultantti on keskilinjan vasemmalla puolella. 1p

Voimat $\overline{F}$ ja $\overline{N}$ aiheuttavat momentin pisteen P suhteen. $\overline{G}$ vaikuttaa painopisteessä, joten se ei aiheuta momenttia. $\overline{F}$ aiheuttaa momentin vastapäivään ja $\overline{N}$ aiheuttaa momentin myötäpäivään. Veneen kallistuessa $\overline{N}$:n vaikutuspiste siirtyy niin paljon vasemmalle, että $\overline{N}$:n aiheuttama momentti kasvaa yhtä suureksi kuin $\overline{F}$:n aiheuttama, jolloin saavutetaan momenttitasapaino ja vene ei kallistu enempää. 1p (2p) Tasapainon syntymistä edistää myös se, että veneen kallistuessa $\overline{F}$:n momenttivarsi lyhenee ja lisäksi voima $\overline{F}$ pienenee, kun purjeen tuulta vastaan kohtisuora pinta-ala vähenee. 1p (3p)

Vaikka vene kallistuisi voimakkaassa tuulessa hyvinkin paljon, vene ei siinä mielessä kaadu, että se palaa tuulen loputtua pystyasentoon $\overline{N}$:n aiheuttaman momentin vaikutuksesta.

c)



$\Delta\overline{v}$ on ilmavirran nopeuden muutos sen osuessa purjeeseen,

$\overline{a}_{\text{ilma}}$ on tarkasteltavan pienen ilmamassan keskikiihtyvyys sen törmätessä purjeeseen,

$\overline{F}_{\text{purje}}$ on tarkasteltavan pienen ilmamassan purjeeseen kohdistama keskimääräinen voima törmäyksen aikana.

Yllä olevaan kuvaan on kopioitu mittasuhteet ja suunnat säilyttäen tehtävänannon kuvan 3 vektorit $\overline{v}_1$ ja $\overline{v}_2$. Tarkastellaan pientä ilmamassaa, joka törmää purjeeseen. Sen nopeudenmuutos on $\Delta\overline{v}$ ja näin ollen ilmamassan kiihtyvyys on saman suuntainen $\overline{a}_{\text{ilma}}$. Purje kohdistaa ilmamassaan kiihtyvyyden suuntaisen voiman, joten ilmamassa kohdistaa purjeeseen vastakkaissuuntaisen voiman $\overline{F}_{\text{purje}}$. 2p (5p)

$\overline{F}_{\text{purje}}$ kiihdyttää purjeveneen nopeutta. $\overline{F}_{\text{purje}}$:n suunta on kulkusuuntaan nähden hieman oikealle, joten sillä on myös veneen kulkusuuntaan nähden kohtisuora komponentti. Kohtisuorassa suunnassa nopeus ei kuitenkaan kasva merkittävän suureksi, koska veneen rungosta ja erityisesti kölistä johtuen veden vastusvoimat tässä suunnassa ovat hyvin suuret kulkusuunnan suuntaisiin vastusvoimiin verrattuna. 2p (7p)

b)

Myötätuulessa purjevene ei voi saavuttaa tuulen nopeutta, koska jos purjevene liikkuisi samalla nopeudella kuin ilmavirta, ei ilmavirta enää törmäisi purjeeseen eikä näin ollen aiheuttaisi enää purjevenettä kiihdyttävää voimaa. Myötätuulessa purjeeseen kohdistuva voima alenee nopeuden kasvaessa. Nopeus jää lopulta huomattavasti alhaisemmaksi kuin ilmavirran nopeus, koska kiihtyvyys lakkaa jo silloin, kun purjeeseen kohdistuva voima on yhtä suuri kuin veden aiheuttama liikettä vastustava voima, joka kasvaa veneen nopeuden kasvaessa. 1p (8p)

Kun tuuli muodostaa kulman kulkusuuntaan nähden, edellä kuvattua ongelmaa ei tule. Veneen nopeudesta riippumatta ilmavirran nopeudella on aina kölin suuntaan nähden kohtisuora komponentti ja siten ilmavirta törmää purjeeseen. c-kohdan tarkastelu ei siis oleellisesti muutu suuressakaan nopeudessa, vaan ilmavirran suuntaa voidaan edelleen samalla tavalla muuttaa purjeen avulla, jolloin ilmavirta kohdistaa purjeeseen voiman veneen kulkusuuntaan.

Kun tuuli muodostaa kulman veneen kulkusuuntaan nähden, voidaan venettä kiihdyttää niin kauan, kunnes veden vastusvoimat kasvavat yhtä suureksi kuin purjeeseen kohdistuva voima. Lähellä kohtisuoraa olevilla kulmilla tämä tapahtuu huomattavasti suuremmassa nopeudessa kuin myötätuulessa, joten saavutetaan suurempi nopeus. Tämä edellyttää tietysti oikein suunnattua purjetta. 1p (9p)

HUOMAUTUS LUKIJALLE: b- ja c-kohdan tilanne on helpompi ymmärtää intuitiivisesti energiatarkastelun avulla. Ajatellaan hieman vastaavaa, mutta keinotekoista tilannetta junaradalla. Ratakiskoille on asetettu veturi, jonka sähkömoottorit saavat käyttövoimansa veturiin kiinnitetyn tuulivoimalan avulla. Myötätuulessa tuulivoimala toimii niin kauan, kunnes veturi saavuttaa tuulen nopeuden. Kun tuulen nopeus saavutetaan, ilma ei enää liiku veturiin nähden, joten tuulivoimala ei tuota energiaa, eikä veturia voida enää kiihdyttää. Vaikka kitka olisi mitättömän pieni, ei tuulen nopeutta voida ylittää tai edes aivan saavuttaa pienestä kitkasta johtuen.

Mikäli muuten samassa tilanteessa tuuli puhaltaa kohtisuorasti kulkusuuntaan nähden, tuulivoimala toimii riippumatta siitä, millä nopeudella veturi liikkuu. Näin ollen voimala tuottaa energiaa vaunun kiihdyttämiseksi millä tahansa nopeudella. Kiihtyminen lakkaa vasta sitten, kun liikettä vastustavien voimien teho kasvaa yhtä suureksi kuin moottorin tuottama teho.

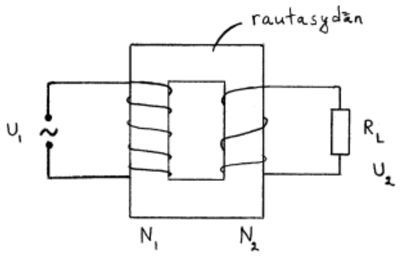
Ympäripyöreästi ilmaisten poikittaisessa tuulessa purjehtiminen toimii siis siten, että purjeita ja köliä nokkelasti käyttäen saadaan tuulesta otettua energiaa veneen nopeudesta riippumatta ja vene kiihtyy niin kauan, kunnes vastusvoimien teho kasvaa yhtä suureksi kuin tuulesta saatu teho.

+13. Sähkön tuotannossa ja siirrossa sähkömagneettisella induktiolla on keskeinen merkitys.

a) Selitä, miten muuntaja toimii. (3 p.)
b) Mistä muuntajien tehohukka aiheutuu. (2 p.)
c) Miksi sähkönjakeluverkossa tarvitaan muuntajia? (2 p.)
d) Tehtaan käyttämä 15 kW:n hyötyteho siirretään 75 km:n päässä olevasta voimalaitoksesta. Siirtojohtimina käytetään alumiinijohtimia, joiden resistanssi pituusyksikköä kohti on 0,065 Ω/km. Mikä on energiansiirron hyötysuhde, kun siirtolinjan tehollinen napajännite tehtaalla on 1) 21 kV, 2) 400 V? (2 p.)

Ratkaisu.

a)



Muuntajassa on kuvan mukaisesti kytketty kaksi käämiä induktiivisesti yhteisen suljetun rautasydämen ympärille. Kuvan vasen puoli on ensiöpuoli ja oikea puoli toisiopuoli. Ensiöpuoli koostuu yhteisen rautasydämen ympärille kierretystä ensiökäämistä, jonka kierrosluku on N_1 ja vaihtojännitelähteestä. Vaihtojännitelähteen ensiöjännite U_1 aiheuttaa ensiökäämiin ensiövirran I_1, joka taas aiheuttaa johtimen ympärille magneettikentän. Koska johdin on kierretty käämiksi rautasydämen ympärille, kytkeytyy tämä kenttä lähes kokonaan rautasydämeen. 1p Koska rautasydän muodostaa suljetun silmukan, lävistää lähes koko ensiöpuolen magneettivuo myös toisiopuolella olevan toisiokäämin. Siksi muuntajan käämien sanotaan olevan induktiivisesti kytkettyjä. Induktiivisen kytkennän vuoksi ensiöpuolelle kytketty vaihtojännite aiheuttaa vaihtuvan (muuttuvan) magneettivuon myös toisiokäämille, jolloin toisiokäämiin indusoituu induktiolain mukainen vaihtojännite. 1p (2p) Jännitteet ovat

$$U_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ ja}$$
$$U_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

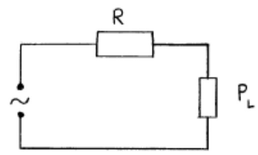
Siten

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \left(= \frac{I_2}{I_1}\right),$$ 1p (3p)

kun käämien resistanssit ja muuntajan tehohäviöt ovat hyvin pienet. Näin muuntajalla voidaan käämien kierroslukujen mukaisesti muuntaa vaihtojännitteen suuruutta.

b) Muuntajien tehohukkaa aiheutuu kolmella tavalla syntyvistä lämpöhäviöistä. Käämien johtimilla on (pieni) resistanssi, josta aiheutuu tehohäviöitä. 1p (4p) Lisäksi muuttuva magneettivuo indusoi rautasydämeen pyörrevirtoja, jotka lämmittävät rautasydäntä. Samaa aiheuttaa rautasydämen magnetoitumisen jatkuva vaihtelu, jolloin raudan hystereesi aiheuttaa myöskin lämpöhäviöitä. 1p (5p)

c) Sähkönjakeluverkkoon tuotettu sähkövirta on vaihtovirtaa. Pitkiä sähköenergian siirtoetäisyyksiä ajatellen jännite on tehohäviöiden minimoimiseksi oltava mahdollisimman suuri, kun taas sähköenergian käyttökohteissa on tarve pienemmille jännitteille niin teknisistä kuin turvallisuussyistäkin. 1p (6p) Nämä vaihtojännitteiden muuntamiset suuremmiksi (esim. voimalaitoksen tuottama vaihtojännite siirtoverkkoon sopivaksi) tai pienemmiksi (esim. siirtoverkosta kotitalouksien verkkojännitteeksi) onnistuvat vähäisillä tehohäviöillä helposti muuntajilla. 1p (7p) d)



Lasketaan siirtojohtimen resistanssi R edestakaisella $2 \cdot 75\,\mathrm{km} = 150\,\mathrm{km}$ matkalla.

$$R = 0{,}065\,\frac{\Omega}{\mathrm{km}} \cdot 150\,\mathrm{km} = 9{,}75\,\Omega$$

Kuorman (tehdas) teho $P_L = 15000\,\mathrm{W}$. Siirtojohtimien hukkateho

$$P = RI^2.$$

Ja edelleen energiansiirron hyötysuhde ilman muuntajia on

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{P_{\mathrm{anto}}}{P_{\mathrm{otto}}}\\ &= \frac{P_L}{P_L + P}\\ &= \frac{1}{1+\frac{P}{P_L}}\\ &= \frac{1}{1+\frac{RI^2}{P_L}}\end{aligned}$$

Sijoitetaan $I = \frac{P_L}{U_L}$, saadaan

$$\eta = \left(1 + \frac{R \cdot \left(\frac{P_L}{U_L}\right)^2}{P_L}\right)^{-1}$$

$$\eta = \left(1 + \frac{RP_L}{U_L^2}\right)^{-1}$$

Eri jännitteillä saadaan:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \left(1 + \frac{RP_L}{U_1^2}\right)^{-1}\\ &= \left(1 + \frac{9{,}75\,\Omega \cdot 15000\,\mathrm{W}}{(21000\,\mathrm{V})^2}\right)^{-1}\\ &= 0{,}999668\ldots\\ &\approx 99{,}97\% \quad \text{1p (8p)}\\ \eta_2 &= \left(1 + \frac{RP_L}{U_2^2}\right)^{-1}\\ &= \left(1 + \frac{9{,}75\,\Omega \cdot 15000\,\mathrm{W}}{(400\,\mathrm{V})^2}\right)^{-1}\\ &= 0{,}522448\ldots\\ &\approx 52\%\end{aligned}$$

Vastaus: 1) 99,97% eli laskentatarkkuuden rajoissa 100%. 2) 52%. 1p (9p)